

Title	λ よりも大きいブロック共有数をもつQuasi-Residual BIB Design(v, b, r, k, λ)が存在するための必要条件 (デザインの構成と解析)
Author(s)	小林, 康幸; 浜田, 昇
Citation	数理解析研究所講究録 (1977), 311: 48-57
Issue Date	1977-10
URL	http://hdl.handle.net/2433/103899
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

入よりも大きいブロック共有数をもつ *quasi-residual*
BIB design (v, b, r, k, λ) が存在するための必要条件

広島大 計算センター 小林 康幸

広島大 理学部 浜田 昇

§1. 序

BIB design $D(v, b, r, k, \lambda)$ において,

$$v = k(k + \lambda - 1) / \lambda, \quad b = v + k + \lambda - 1, \quad r = k + \lambda \quad (1.1)$$

が成り立つ時, この *design* D を *quasi-residual design* とい
 う. また, *quasi-residual design* D を含む対称な *BIB design*
 $(b+1, r, \lambda)$ が存在する時, その *design* D は *SBIB design*
 に "埋め込み可能 (*embeddable*)" であるという.

一般に, 集合数が入よりも大きいブロックが存在する *quasi-*
residual design (v, b, r, k, λ) は, *SBIB design* に埋め込
 めないことは良く知られている.

ここでは, 集合数が入よりも大きいブロックをもつ *quasi-*
residual design (v, b, r, k, λ) が存在するための必要条
 件を, ブロックの大きさ k の範囲で与える.

§ 2. いままでの結果

定理 2.1. (Connor [2]) 任意の BIB design $D(v, b, r, k, \lambda)$ が与えられた時, その異なる2つのブロック $B_j, B_u (j \neq u)$ の会合数を λ_{ju} とすると,

$$-(r - \lambda - k) \leq \lambda_{ju} \leq \{2\lambda k + r(r - \lambda - k)\} / r$$

定理 2.2. (Hamada and Kobayashi [3]) 任意の BIB design $D(v, b, r, k, \lambda)$ に対して, その incidence 行列を N とすると, $N^T N (\equiv \|\lambda_{\alpha\beta}\|)$ は次の3条件を満たす $b \times b$ 対称行列でなければならない.

(a) $\lambda_{\alpha\beta}$ は, $0 \leq \lambda_{\alpha\beta} \leq k$, $\lambda_{\alpha\alpha} = k$ なる整数,

$$(b) \sum_{j=1}^b \lambda_{\alpha j} = \sum_{j=1}^b \lambda_{j\beta} = rk,$$

$$(c) \sum_{j=1}^b \lambda_{\alpha j} \lambda_{\beta j} = (r - \lambda) \lambda_{\alpha\beta} + \lambda k^2$$

(ただし, α, β は $1 \leq \alpha, \beta \leq b$ なる整数である)

§ 3. quasi-residual design のブロック構造

この節では, quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$ が会合数 λ のブロックをもつ為には, k がどのような範囲であるか

を議論する。以下, λ および λ は, $\lambda \geq \lambda + 1, \lambda \geq 3$ を仮定する。

補題 3.1 集合数が λ のブロックをもつ *quasi-residual design* が存在するためには, k は, 任意の整数 j に対して, 次の不等式を満たさねばならない。

$$f_j(k; \lambda, \lambda) = j(j+1)k^2 - ck + d \geq 0 \quad (3.1)$$

ただし,

$$c = (4j-2)\lambda^2 + 2(\lambda - j^2 - j)\lambda + j(j+1),$$

$$d = 4\lambda^4 - (4j+14)\lambda^3 + \{8\lambda + 12j + 6 + j(j+1)\}\lambda^2 - \{2\lambda^2 + 4\lambda j + 2\lambda + 3j(j+1)\}\lambda$$

証明 集合数が λ のブロックをもつ *quasi-residual design* が存在したとし, その *incidence* 行列を N , $(\lambda_{ij}) = N^T N$ を $b \times b$ 対称行列とすると, 一般性を失わずに $\lambda_{12} = \lambda$ としよ。

$x_l = \lambda_{1, l+2}, y_l = \lambda_{2, l+2}$ ($l = 1, 2, \dots, b-2$) とすると, 定理 2.2 より

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i = \sum_{i=2}^{b-2} y_i = k(k+\lambda-1) - \lambda,$$

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i y_i = \lambda k^2 - k\lambda, \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i^2 = \sum_{i=1}^{b-2} y_i^2 = \lambda k^2 - \lambda^2$$

一方, x_i, y_i, λ は整数だから, 任意の整数 j に対し,

$$\sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - 2\lambda + j + \frac{1}{2})^2 \geq (b-2)/4 \quad (3.3)$$

(1.1), (3.2) を使って整理すると結果を得る. Q.E.D.

補題 3.2 集合数が λ の ブロックをもつ *quasi-residual design* が存在する為には, $\lambda \leq 2\lambda - 1$, $\alpha \leq k \leq \beta$ でなければならぬ. ただし,

$$\alpha = \lambda\lambda / (2\lambda - \lambda), \quad \beta = \{2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4\lambda + 3)\lambda - \lambda^2 - \lambda\} / (\lambda - \lambda) \quad (3.4)$$

証明 (3.1) で $j = 0$ とすると,

$$f_0(k; \lambda, \lambda) = 2\lambda \{(\lambda - \lambda)k + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4\lambda + 3)\lambda - (\lambda^2 + \lambda)\}$$

従って $\lambda \geq \lambda + 1$ だから $k \leq \beta$ を得る. 次に定理 2.1 を *quasi-residual design* に適用すると, $\lambda \leq 2\lambda k / (k + \lambda)$. $2\lambda k / (k + \lambda) < 2\lambda$ を使って $\lambda \leq 2\lambda - 1$. 従って上の不等式を k について整理すると, $\alpha \leq k$ を得る. Q.E.D.

補題 3.3 $f_j(k; \lambda, \lambda)$ および α, β をそれぞれ, (3.1) および (3.4) で定義したものとすると, $j \leq -1$, $\alpha \leq k \leq \beta$ では常に $f_j(k; \lambda, \lambda) \geq 0$ である.

証明 (i) $j = -1$ の時

$$\lambda + 1 \leq \lambda \leq 2\lambda - 1, \quad k \geq \alpha = \lambda\lambda / (2\lambda - \lambda) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} & f_{-1}(k; \lambda, \lambda) \\ &= 2\lambda \{(3\lambda - \lambda)k + 2\lambda^2(\lambda - 1) + 2\lambda + 3\lambda(\lambda - \lambda - 1) + \lambda(2\lambda - 1 - \lambda) - \lambda\lambda\} \\ &\geq 2\lambda \{(3\lambda - \lambda)k - \lambda\lambda\} \geq 0 \end{aligned}$$

(ii) $j \leq -2$ の時

$$f_j(k; \lambda, \lambda) = a^*j^2 + b^*j + c^* \equiv g(j)$$

とおくと,

$$a^* = k^2 + (2\lambda - 1)k + \lambda(\lambda - 3) \quad (> 0),$$

$$b^* = a^* - 4\lambda(\lambda k + \lambda^2 - 3\lambda + 1), \quad (3.5)$$

$$c^* = 2\lambda\{- (\lambda - 1)k + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4\lambda + 3)\lambda - (\lambda^2 + 1)\}$$

従って,

$$-b^*/2a^* = -1/2 + 2\lambda(\lambda k + \lambda^2 - 3\lambda + 1)/a^* > -1/2,$$

$$g(-2) = 2\{a^* + \lambda(5\lambda - 1)k + 2\lambda^3(\lambda - 2) + \lambda^2(\lambda + 2\lambda - 9) \\ + (2\lambda - 1)\lambda + 3\lambda\} > 0$$

ゆえに, $j \leq -2$ では $g(j) > 0$ Q. E. D.

さて, ここで k についての 2 次方程式

$$f_j(k; \lambda, \lambda) = j(j+1)k^2 - ck + d = 0$$

の 2 根を α_j, β_j ($\alpha_j \leq \beta_j$), $m(j; \lambda, \lambda)$ をその平均, すなわち

$$\alpha_j = \frac{c - \sqrt{D_j(\lambda, \lambda)}}{2j(j+1)}, \quad \beta_j = \frac{c + \sqrt{D_j(\lambda, \lambda)}}{2j(j+1)} \quad (3.6)$$

$$m(j; \lambda, \lambda) = c / \{2j(j+1)\}$$

と定義する. (ただし $D_j(\lambda, \lambda) = c^2 - 4dj(j+1)$).

補題 3.4 (i) $k = \alpha$ ($= \lambda\lambda / (2\lambda - 1)$) の時, 任意の j, λ, λ に対し $f_j(\alpha; \lambda, \lambda) \geq 0$, かつ等号成立は $j = 2\lambda - \lambda - 1$ または $2\lambda - \lambda$ に限る.

(ii) 任意の λ, λ に対し, $m(j; \lambda, \lambda)$ は $j (\geq 1)$ の単調減少関数であり,

$$(a) \quad m(j; \lambda, \rho) < \alpha \quad (j \geq 2\lambda - \rho),$$

$$(b) \quad m(j; \lambda, \rho) > \alpha \quad (j \leq 2\lambda - \rho - 1)$$

証明 (i) (3.2), (1.1) から

$$\lambda \sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - \rho) = \{(2\lambda - \rho)k - \lambda\rho\} (k + \rho - 1),$$

$$\lambda \sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - \rho)^2 = \{(2\lambda - \rho)k - \lambda\rho\} \{(2\lambda - \rho)k - \rho(\lambda - 1)\}$$

$$\therefore f_j(k; \lambda, \rho) = \lambda \left\{ \sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - 2\lambda + j + \frac{1}{2})^2 - (b-2)/4 \right\}$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - \rho)^2 + 2\lambda(\rho - 2\lambda + j + \frac{1}{2}) \sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - \rho)$$

$$+ \lambda(b-2) \left\{ (\rho - 2\lambda + j + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \right\}$$

$$e, f \in, \quad e = \rho - 2\lambda + 2j + 1, \quad f = (\lambda - 1)(\rho - 4\lambda + 2j + 1) \text{ とす}$$

ると,

$$f_j(k; \lambda, \rho) = \{(2\lambda - \rho)k - \lambda\rho\} (ek + f) + \lambda(b-2) \left\{ (\rho - 2\lambda + j + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \right\} \quad (3.7)$$

$$\therefore f_j(\alpha; \lambda, \rho) = \lambda(b-2) \left\{ (\rho - 2\lambda + j + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \right\} \geq 0$$

さらに, 等号成立は $j = 2\lambda - \rho - 1$ または $2\lambda - \rho$ の時のみ.

$$(ii) \quad 2m(j; \lambda, \rho) / \alpha_j = -\lambda \{ 2\lambda j^2 + (\rho - \lambda)(2j + 1) \} / \{ j^2(j+1)^2 \} < 0,$$

$$2 \{ m(2\lambda - \rho - 1; \lambda, \rho) - \alpha \} (2\lambda - \rho - 1)(2\lambda - \rho)$$

$$= \rho(\rho - \lambda - 1) + \lambda(2\lambda - 1 - \rho) + 2\rho - \lambda > 0,$$

$$2 \{ m(2\lambda - \rho; \lambda, \rho) - \alpha \} (2\lambda - \rho - 1)(2\lambda - \rho)$$

$$= -(\lambda-1)(2\lambda-1) - 2\lambda^2 < 0$$

より結果を得る.

Q.E.D.

- 補題 3.5 (i) $j \geq 2\lambda-1$ の時, $D_j(\lambda, \lambda) \geq 0$ なら $\beta_j < \alpha$,
 (ii) $1 \leq j \leq 2\lambda-1-1$ の時, $D_j(\lambda, \lambda) \geq 0$ なら $\alpha \leq \alpha_j \leq \beta_j \leq \beta$,
 (iii) $j = 2\lambda-1-1$ の時, $D_j(\lambda, \lambda) \geq 0$, $\lambda \neq 2\lambda-1$ なら $\alpha_j = \alpha$,
 $\beta_j = (\lambda-1)(\lambda+1)/(2\lambda-1-1)$.

証明 (i) 補題 3.4 より明らか.

(ii) $\lambda+1 \leq \lambda \leq 2\lambda-1$, $1 \leq j \leq 2\lambda-1-1$ だから

$$\beta = (3\lambda-1-1) + 2\lambda(\lambda-1)^2/(\lambda-1) \geq 2\lambda^2 - \lambda \quad (\lambda = 2\lambda-1),$$

$$m(j; \lambda, \lambda) \leq m(1; \lambda, \lambda) = (\lambda^2 + \lambda - 2\lambda + 1)/2 < 2\lambda^2 - \lambda$$

ゆえに $\beta_j \leq \beta$ を示すには, $f_j(2\lambda^2 - \lambda; \lambda, \lambda) \geq 0$ を示せばよい.

$k = 2\lambda^2 - \lambda$, $1 \leq j \leq 2\lambda-1-1$ の時, (3.5) より,

$$a^*j^2 + b^*j \geq a^* + b^* = 4\lambda(2\lambda-1-1) \geq 0$$

$$c^* = 2\lambda(2\lambda-1-1)(\lambda + 2\lambda^2 - 3\lambda) > 0$$

ゆえに

$$f_j(2\lambda^2 - \lambda; \lambda, \lambda) = a^*j^2 + b^*j + c^* > 0$$

(iii) (3.7) より, $j = 2\lambda-1-1$ の時

$$f_j(k; \lambda, \lambda) = \{(2\lambda-1)k - \lambda\} \{(2\lambda-1)k - (\lambda-1)(\lambda+1)\}$$

ゆえに結果を得る.

Q.E.D.

ここで, $K(\lambda, \lambda)$ を次のように定義する.

$$K(\lambda, \lambda) = K(\lambda) \cap \left\{ [\alpha, \beta] - \bigcup_{j \in A} (\alpha_j, \beta_j) \right\} \quad (3.8)$$

ただし, $K(\lambda)$ は, $k(k-1)/\lambda$ (または (1.1) の v) が整数になる $k (\geq 2)$ の集合, α, β および α_j, β_j はそれぞれ (3.4) および (3.6) で定義した数, A は

$$A \equiv A(\lambda, \lambda) = \{j: 1 \leq j \leq 2\lambda - \lambda - 1, D_j(\lambda, \lambda) \geq 0\}$$

これまで示した補題から, 次の定理が導かれる。

定理 3.1 $\lambda \geq 3, \lambda \geq \lambda + 1$ の時, 集合数が λ のブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$ が存在する為には, $\lambda \leq 2\lambda - 1, k \in K(\lambda, \lambda)$ でなければならない。

系 3.1 $k \neq \lambda(2\lambda - 1)$ なら, 集合数が $2\lambda - 1$ のブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$ は存在しない。

証明 (3.8) で $\lambda = 2\lambda - 1$ とすると $K(\lambda, 2\lambda - 1) = \{\lambda(2\lambda - 1)\}$ となり, 結果を得る。 Q. E. D.

系 3.2 $\lambda \geq 7$ の時, 集合数が $2\lambda - 2$ のブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$ が存在するためには, $k = \lambda(\lambda - 1)$ または, $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 \leq k \leq 2\lambda^2 + \lambda + 1$ でなければならない。

証明 $A(\lambda, 2\lambda - 2) = \{1\}$, また補題 3.5 の (iii) から, $\alpha_1 = \lambda(\lambda - 1), \beta_1 = (\lambda - 1)(2\lambda - 1)$. 従って

$$K(\lambda, 2\lambda - 2) = K(\lambda) \cap \{k; k = \lambda(\lambda - 1) \text{ または } (\lambda - 1)(2\lambda - 1) \leq k \leq \beta\}$$

一方,

$$\beta = (2\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 2) / (\lambda - 2) = 2\lambda^2 + \lambda + 3 + 4 / (\lambda - 2)$$

従って, $\lambda \geq 7$ なら $[\beta] = 2\lambda^2 + \lambda + 3$. さらに,

$$2\lambda^2 + \lambda + 3, 2\lambda^2 + \lambda + 2 \notin K(\lambda), 2\lambda^2 + \lambda + 1 \in K(\lambda)$$

より結果を得る.

Q.E.D.

系 3.3 $3 \leq \lambda \leq 6$ の時, 集合数が $2\lambda - 2$ のブロックを
持つ quasi-residual design (v, b, r, k, λ) が存在するた
めには, k は表 3.1 で与えられる整数でなければならぬ.

表 3.1 ($\lambda = 2\lambda - 2, 3 \leq \lambda \leq 6$)

$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$k = 6$ または $10 \leq k \leq 28$
4	6	$k = 12$ または $21 \leq k \leq 41$
5	8	$k = 20$ または $36 \leq k \leq 56$
6	10	$k = 30$ または $55 \leq k \leq 82$

証明 $\lambda = 3, 4, 5, 6$ の時, それぞれ, $[\beta] = 28, 41, 59, 82$

さらに, $59, 58, 57 \notin K(5)$ より結果を得る. Q.E.D.

系 3.4 (i) $\lambda = 3$ の時, $K(3, 5) = \{15\}$,

$$K(3, 4) = \{6, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28\}$$

(ii) $\lambda = 4$ の時, $K(4, 7) = \{28\}$,

$$K(4, 6) = \{12, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37, 40, 41\}$$

$$K(4, 5) = \{9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, \dots, 76, 77\}$$

系 3.4 の (i) の結果は Lawless [4] が求めた結果と同じであ

る。また次の系 3.5 は [1] で得られた結果と同じである。

系 3.5 $k > 2(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)$ の時, λ より大きい集合数
をもつ *quasi-residual design* $D(v, b, r, k, \lambda)$ は存在しない。

証明 $\beta = \{2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4\lambda + 3)\lambda - \lambda^2 - \lambda\} / (\lambda - 1)$ は, λ
の単調減少関数である。 $\lambda + 1 \leq \lambda \leq 2\lambda - 1$ だから

$$\beta \leq 2(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1) \quad \text{Q.E.D.}$$

参考文献

- [1] R. C. Bose, S. S. Shrikhande and N. M. Singhi, Edge regular multi-graphs and partial geometric designs with an application to the embedding of quasi-residual designs, *Teorie Combinatorie Tomo I* (1973), 49-81.
- [2] W. S. Connor, On the structure of balanced incomplete block designs, *Ann. Math. Statist.* 23 (1952), 57-71.
- [3] N. Hamada and Y. Kobayashi, On the block structure of BIB designs with parameters $v = 22$, $b = 33$, $r = 12$, $k = 8$ and $\lambda = 4$, To appear in *J. Combinatorial Theory* (1977).
- [4] J. F. Lawless, Block intersections in quasi-residual designs, *Aequationes Math.* 5 (1970), 40-46.