

Tight design について

東大 理 榎本 彦衛

§ 1. Fisher の不等式の拡張と tight design

(X, \mathcal{L}) を t - (v, k, λ) design とします。すなわち、 X は v 個の "点" から成る集合、 \mathcal{L} は X の k 点部分集合の集まり (i.e. $\mathcal{L} \subseteq X^{(k)}$, ただし $X^{(k)}$ というのは X の k 点部分集合の全体と定義する) であり、 X に含まれる任意の t 点部分集合 Y (i.e. $Y \in X^{(t)}$) に対して

$$\#\{B \in \mathcal{L} \mid Y \subseteq B\} = \lambda$$

が成り立ちます。

$t=2$ の時、 $|\mathcal{L}| \geq |X|$ が成り立つというのが、有名な Fisher の不等式ですが、Petrenjuk, 野田, Ray-Chaudhuri, Wilson により、 $t > 2$ の場合に拡張されました。

定理 1 ([8] Theorem 1) $t=2s$, $v-s \geq k \geq 2s$ ならば、

$$|\mathcal{L}| \geq \binom{v}{s}$$

が成り立つ。

定理1の不等式において等号が成り立つ場合 (i.e. $|\mathcal{L}| = \binom{v}{\Delta}$ となる)、*tight* 2Δ -*design* と呼ぶことにします。なお、 $k = v - \Delta$ の場合、すなわち $\mathcal{L} = X^{\binom{v-\Delta}{\Delta}}$ のとき、*trivial tight* 2Δ -*design* と呼ばれます。

(注) $k = 2\Delta + 1$ の時には *derived design* に上の定理1を適用する以外、有力な条件が知られていないようです。したがって、*tight* $(2\Delta + 1)$ -*design* というのは *tight* 2Δ -*design* の拡大ということになってしまいます。

§ 2. Blocks の intersection numbers

異なる2つの blocks に共通に含まれる点の数を (*block*) *intersection number* と呼ぶことにします。

定理2 ([8] Theorem 3) *Intersection numbers* が Δ 種類ならば、 $|\mathcal{L}| \leq \binom{v}{\Delta}$ となる。

(注) 上の定理2は任意の $\mathcal{L} \subseteq X^{\binom{k}{\Delta}}$ (i.e. 0 -*design*) に対して成り立ちます。しかも、等号を満たせば (X, \mathcal{L}) は自動的に 2Δ -*design* になることが証明されています ([3] Theorem (15.6)')。

定理 3 ([8] Theorem 4) 2Δ -design において次の二つの条件は同値である。

- (i) Intersection numbers が Δ 種類である。
- (ii) Tight 2Δ -design である。

定理 1 と定理 2 により、(i) ならば (ii) が成り立つということと、intersection numbers が Δ 種類以上あるということがわかるので、残っているのは tight ならば intersection numbers が高々 Δ 種類になるということとです。それには、すべての intersection numbers が零点になるような Δ 次の多項式が存在すればよいわけです。[8] においてはそのような多項式の存在証明だけが与えられていますが、具体的な形も求めることができます。

$$\psi_{\Delta}(X) = \sum_{i=0}^{\Delta} (-1)^{\Delta-i} \frac{\binom{v-\Delta}{i} \binom{k-i}{\Delta-i} \binom{k-1-i}{\Delta-i}}{\binom{\Delta}{i}} \binom{X}{i}$$

となることが知られています。

§ 3. Association scheme

集合 Z に対し、 $Z \times Z$ から $\Delta + 1$ 点集合 S の上への写像 a が次の性質 (i) ~ (iv) を満たす時、 Z は (a に関して) クラス Δ の association scheme になる、と云います。

$$(i) \quad a(A, B) = a(B, A)$$

$$(ii) \quad a(A, A) = a(B, B)$$

$$(iii) \quad a(A, B) = a(A, A) \text{ ならば } A = B \text{ となる。}$$

(iv) $A, B \in \mathcal{L}$ の時

$$\# \{ C \in \mathcal{L} \mid a(C, A) = i, a(C, B) = j \}$$

は $i, j (\in S)$ および $a(A, B)$ だけで決まる。(ここで $a(A, B) = k$ の時の i の数のことを μ_{jk}^i と書くことにします。)

(注) $S = \{0, 1, 2, \dots, v\}$ にとり、 $a(A, A) = 0$ と定義するのが普通です。なお、 $a(A, B) = i$ の時、 A と B とは i -associate であるといいます。 μ_{jk}^i という数は *intersection numbers* と呼ばれることもあります。design を扱っているときには前節の *block intersection numbers* とまぎらわしくなるので、*association numbers* という呼び方を使うことにします。文献によれば μ_{jk}^i のことを p_{ij}^k と書かれることも多く、それとは添数の場所がずれてるので注意して下さい。なお、

$$\mathcal{R}_i = \{ (A, B) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid a(A, B) = i \}$$

と定義すると、 $\mathcal{R}_i (i \in S)$ は $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ の分割になっている。この分割の言葉を使って *association scheme* を定義することもできます。

i -associate という関係によって定義される \mathcal{L} 上の adjacency matrix を A_i とします。すなわち、 A_i の (A, B) -成分は、 $q(A, B) = i$ の時に 1, それ以外は 0 と定義されます。 A_i 達の間には

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^n \mu_{jk}^i A_k$$

という関係が成り立ちます。すなわち、 A_0, A_1, \dots, A_n で張られる (複素数体 \mathbb{C} 上の) ベクトル空間を \mathcal{A} とおくと、 \mathcal{A} は全行列環の部分多元環になっており、 A_0, A_1, \dots, A_n を基底にとると $\{\mu_{jk}^i\}$ が構造定数になります。写像 q の対称性より \mathcal{A} が可換環になることがわかりますが、さらに \mathcal{A} は半単純環になります。

$$\mathcal{A} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{E}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{E}_n$$

と、一次元部分環 \mathcal{E}_i ($\cong \mathbb{C}$) の直和として表わされます。なお、

$$A_0 (= I) = E_0 + E_1 + \dots + E_n \quad (E_i \in \mathcal{E}_i)$$

と表わすと、 E_i は \mathcal{A} の primitive idempotents になっており、 $\mathcal{E}_i = \mathbb{C} E_i$ となります。

§ 4. Tight design からつくられる association scheme

(X, \mathcal{L}) を tight 2s-design とします。定理 3 により、intersection numbers は λ 種類になるので、それらを

x_1, x_2, \dots, x_n とし、 $i \leq n$ に $x_0 = k$ とおきます。

定理 4 ([2] Theorem 1) $A, B \in \mathcal{L}$ に対し、 $|A \cap B| = x_i$ となるとき A と B は i -associate であると定義すると、 \mathcal{L} はクラス \mathcal{L} の association scheme になる。

[2] の証明はあまりわかりやすすくないと思われるので、もっと一般化した定理 ([4] Theorem 5.25) の場合の方針に沿った証明を紹介しておきます。

1°) 定理 4 における association の定義が、前節の (i), (ii), (iii) を満たすことはすぐにわかります。この時、 \mathcal{L} が association scheme になるには、ベクトル空間 A が多元環になること、すなわち積に関して閉じていることをいえばよいということはすぐにわかります。(構造常数が association number になります。)

2°) $X^{(A)}$ にはクラス \mathcal{L} の association scheme の構造が自然に定義されます (Johnson scheme と呼ばれています)。すなわち、 $S, T \in X^{(A)}$ に対して、 $|S \cap T| = s - i$ の時 S と T は i -associate であると定義されます。この時の adjacency matrices を C_i ,

$$\mathcal{C} = \langle C_0, C_1, \dots, C_n \rangle$$

とかくと、前節の結果より、

$$C_0 (= I) = E_0 + E_1 + \dots + E_A$$

と primitive idempotents の和に書くことができます。

3°) $X^{(A)}$ と \mathcal{L} の間の incidence matrix を N とおきます。
すなわち、 $\binom{v}{s} \times \binom{v}{b}$ 行列 N の (S, B) -成分は、 $S \subseteq B$ の時には 1, それ以外は 0 と定義します。定理 1 (の証明) より N が正則行列になることがわかります。

4°) ${}^t N C_i N$ の (A, B) -成分は

$$\# \{ (S, T) \in X^{(A)} \times X^{(A)} \mid S \subseteq A, T \subseteq B, |S \cap T| = A - i \}$$

であるが、これは $|A \cap B|$ だけで決る。したがって、

$${}^t N C_i N \in \mathcal{A}$$

となる。

5°) $N {}^t N$ の (S, T) -成分は

$$\# \{ B \in \mathcal{L} \mid S, T \subseteq B \}$$

であるが、これは $|S \cap T|$ だけで決る。したがって

$$N {}^t N \in \mathcal{C}$$

となる。とくに

$$N {}^t N = \sum_{i=0}^A c_i E_i$$

となる常数 c_i が存在し、これは

$$N {}^t N E_i = c_i E_i$$

を満たす。

$$6°) F_i = \frac{1}{c_i} {}^t N E_i N$$

と定義すると、4°) より $F_i \in A$ となり、5°) より

$$\begin{aligned} F_i F_j &= \frac{1}{c_i c_j} {}^t N E_i N {}^t N E_j N \\ &= \frac{1}{c_i} {}^t N E_i E_j N \\ &= \delta_{ij} F_i \end{aligned}$$

となるから、 F_i 達は互に直交する idempotents になっている。

N が正則行列であるから $F_i \neq 0$ で、 $\mathcal{F}_i = \mathbb{C} F_i$ とおくと、これは A の一次元部分空間になっている、 $\dim A = \nu + 1$ だから

$$A = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{F}_\nu$$

となり、 A が積に関して閉じていることがわかります。

(注1) この定理はもっと一般に " $(2s-2)$ -design (X, \mathcal{L}) において、intersection numbers が s 種類ならば、それを使って blocks の間の association を定義すると、クラス s の association scheme になる" という形で成り立ちます。この定理は、 $X^{(s-2)}$ と \mathcal{L} の間の incidence matrix を使って、 s 個の idempotents F_i ($0 \leq i \leq s-1$) を上の6°) と同じようにつくり、最後の一個は $F_s = A_0 - \sum_{i=0}^{s-1} F_i$ と定義することにより A が可換環になることが証明されます。

$$(注2) \quad A_i = \sum_{j=0}^s \lambda_{ij} E_j$$

と表わした時、 λ_{ij} ($0 \leq j \leq s$) は A_i の固有値となり、 E_j の rank が λ_{ij} の重複度になります。rank $E_j = \text{rank } F_j$ ですから、tight $2s$ -design における adjacency matrix

A_i の固有値の重複度は Johnson scheme $X^{(\lambda)}$ における固有値の重複度と一致することがわかります。固有値 λ_{ij} が決まれば association numbers μ_{jk}^i も一意的に決るのですが、一般に tight 2s-design のパラメータだけで λ_{ij} が一意に決まるのかどうかはまだわかっていないようです。

§5. Tight design の分類問題

Tight 2-design というのは symmetric 2-design のことですから、実例もたくさんあり、完全な分類というのは絶望的です。自明でない tight 4-design は $4-(23, 7, 1)$ design, およびその complementary design である $4-(23, 16, 52)$ design だけが知られており、それ以外には存在しないだろうと予想されていますが、まだ未解決です。自明でない tight 2s-design は $s \geq 3$ の時には存在しないだろうと予想されていますが、いまのところ $s=3$ の時しか証明されていません ([7])。ただし、 s を決めると、自明でない tight 2s-design は高々有限個しか存在しない、ということもわかっています ([1])。その証明は、§2 で述べた $\mathcal{P}_s(X)$ の零点がすべて整数になるような可能性は有限個しかないことを示す、という方法によります。

§ 6. Tight 4-design の分類問題

Tight 4-design の分類に関する論文 [6] には重大な gap があり、tight 4-design の分類はまだ完成していません。可能性が有限個であることがいえば、あとは時間の問題なのですが、この場合

$$4\lambda_2(X) = X^2 - \left(\frac{2(k-1)(k-2)}{v-3} + 1 \right) X + \frac{k(k-1)^2(k-2)}{(v-2)(v-3)}$$

には根が 2 つしかなく、[1] の方法は適用できません。実際、整数解を持つような (v, k) の組は無限にあります。(たとえば、 $v = 16m^2 + 16m + 6$, $k = 8m^2 + 6m + 2$ の時、 $\alpha_1 = 4m^2 + m$, $\alpha_2 = 4m^2 + 3m + 1$ となる。) しかし、デザインのパラメータ $(1, 2, 3, 4$ 点を含む blocks の数) がすべて整数になるようなものは、実際に存在する design の場合以外には知られていないようです。

§ 4 の (注 2) では、blocks のつくる association scheme の構造定数が block design のパラメータだけで決まるかどうか、ていねい、と書きましたが、 $\lambda = 2$ の時には一意的に決まります ([5])。クラス 2 の association scheme というのは強正則グラフになっており、[6] では blocks のつくる強正則グラフのパラメータが整数になるという条件を調べています。

Intersection numbers を x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), ある block との intersection が x_i 点に なるような blocks の数を n_i ($i = 1, 2$), $a = x_2 - x_1$, $e = (k - x_2) / a$ とおくと、他のパラメータはすべて a と e を使って表わすことができます。たとえば、 A_1 の固有値は、 n_1 (重複度 1), e (重複度 $v(v-3)/2$), $e - \frac{k(v-k)}{2a}$ (重複度 $v-1$) となります。

[6] の前半には本質的な誤りはなく、

定理 5. (i) 自明でない tight 4-designs で、 k が素数に なるのは 4-(23, 7, 1) design だけである。

(ii) 自明でない tight 4-design で、 $n_2 \geq n_1$ と なるのは 4-(23, 7, 1) design と 4-(23, 16, 52) design だけである。

という定理は成り立ちます ([9])。

追記: 最近、伊藤、野田両氏により、"自明でない tight 4-design は有限個しかない" ということが証明されたようで、完全な分類の完成も間近ではないかと思われれます。

文 献

- [1] E. Bannai, *On tight designs*, to appear.
- [2] P. J. Cameron, *Near-regularity conditions for designs*, *Geometriae Dedicata* 2 (1973) 213-223.
- [3] P. J. Cameron and J. H. van Lint, "Graph Theory Coding Theory and Block Designs", Cambridge Univ. Press (1975).
- [4] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Repts. Suppl. 10 (1972).
- [5] J. M. Goethals and J. J. Seidel, *Strongly regular graphs derived from combinatorial designs*, *Canad. J. Math.* 22 (1970) 597-614
- [6] N. Ito, *On tight 4-designs*, *Osaka J. Math.* 12 (1975) 493-522.
- [7] C. Peterson, *On tight 6-designs*, to appear.
- [8] D. K. Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *On t -designs*, *Osaka J. Math.* 12 (1975) 737-744
- [9] N. Ito, *Corrections and supplements to the paper "On tight 4-designs"*, to appear.