

ある非線形回路に生じる不規則振動の  
パワースペクトルについて

京大・工 上田暁亮

1. はじめに

物理系の現象には原因と結果の間に不確定な要素が介在している。不確定さが小さいとき、多くの物理系においてはその影響を無視することができ、その場合の現象はいわゆる確定現象として取扱われる。しかし、非線形系においては不確定さがいかに小さくても、それが系に大域的な状態変化をもたらす原因として作用することがある。この種の現象は、系を記述する非線形方程式の解の大域的構造に関連して生じるものであり、このような系においては確率統計的性質を示す定常現象が観察される。

前回の研究集会では、可飽和鉄心をもつ正弦波電圧の印加された直列共振回路に生じる、この種の不規則振動を報告した。<sup>(1)(2)</sup> ここでは、回路の動作を記述する Duffing 方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{dx}{dt} + x^3 = B \cos t \quad (1)$$

の解を用いて微分同相写像

$$\left. \begin{aligned} f_\lambda : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ p_0 &\longmapsto p_1 \\ \lambda &= (k, B) \in \Lambda \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を定義し、不規則振動を表わすアトラクターの構造や、これに関連した未解決問題を整理した。そこに述べた結果を要約すれば、(1) 不規則振動を表わすアトラクターは「系に作用する不確定さの影響によって互に結合される、極小集合の族を含む漸近安定でコンパクトな不変集合」と定義されるのが適当と考えられること。および、(2) 不規則振動の発生機構は「系の状態(定常振動)を表わす動作用点(微分方程式の解で規定される動作用点でない)は、系に作用する不確定さの影響を受け、アトラクター内の極小集合を通る微分方程式の解相互間を彷徨している」と考えられることであった。

今回は不規則振動の全体を不規則過程  $\{X(t)\}$  とみなし、その調和解析について報告する。

## 2. 不規則過程の調和解析

計算機による微分方程式の求解に演算誤差が入るのは避け

られない。従って、この誤差を系に作用する不確定さの要因とみなす。これは現実の系に作用する外乱やパラメタの摂動に比べれば十分小さいと考えられる。

以下では、微分方程式(1)で記述される系のパラメータを

$$\lambda = (a, B) = (0.1, 12.0) \quad (3)$$

とした場合に生じる不規則振動の調和解析を試みる。そのために、不規則過程  $\{X(t)\}$  を、十分長い周期  $T$  ( $2\pi$  の整数倍) をもつ周期性不規則過程  $\{X_T(t)\}$  とみなす。すなわち、区間  $(-T/2, T/2]$  における標本  $x(t)$  に対し、その区間以外では周期  $T$  で繰返されているような振動  $x_T(t)$  を考える。このとき、 $x_T(t)$  は次のようにフーリエ展開される。

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\omega_0 t + b_m \sin m\omega_0 t), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \quad a_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \cos m\omega_0 t \, dt \\ b_m &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) \sin m\omega_0 t \, dt \\ m &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

フーリエ係数  $a_m, b_m$  は  $x_T(t)$  が不規則過程  $\{X_T(t)\}$  の標本であるため、不規則変数である。これらのフーリエ係数から不規則過程  $\{X(t)\}$  の平均値

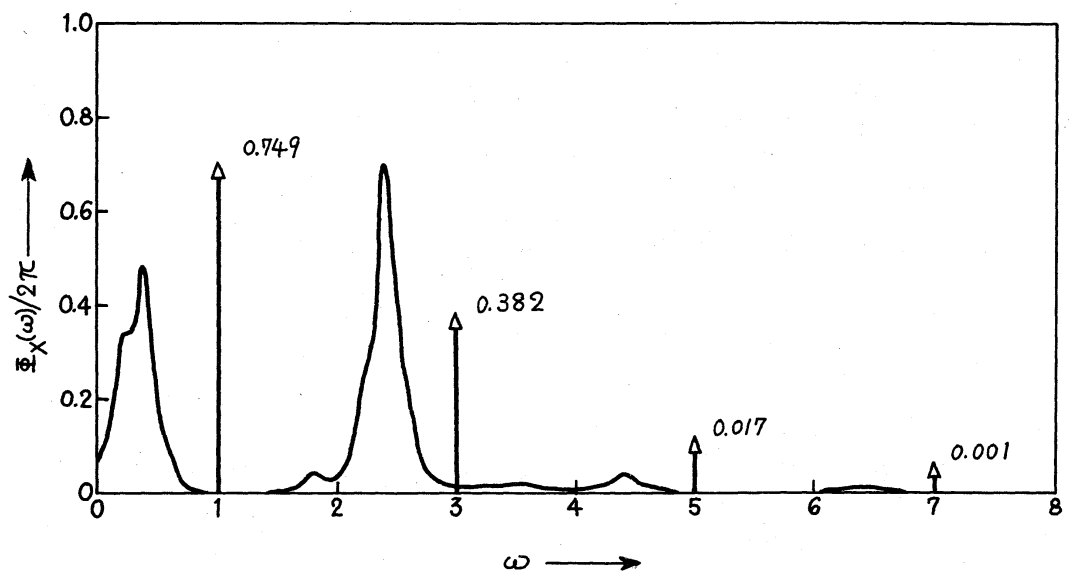
$$\begin{aligned}
 m_X(t) &= \langle X(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X_T(t) \rangle \doteq \langle X_T(t) \rangle \\
 &= \left\langle \frac{a_0}{2} \right\rangle + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \langle a_m \rangle \cos m\omega_0 t + \langle b_m \rangle \sin m\omega_0 t \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

および、平均パワースペクトル

$$\begin{aligned}
 \Phi_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{T} \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right\rangle \\
 &\doteq \Phi_{X_T}(n\omega_0) = \frac{2\pi}{\omega_0} \left\langle \frac{1}{4} (a_n^2 + b_n^2) \right\rangle, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (7)
 \end{aligned}$$

が推定される。集合平均は不規則振動を長時間観測し、連続した区間列  $((n-\frac{1}{2})T, (n+\frac{1}{2})T]$  ( $n=0, 1, 2, \dots, N_S$ ) における波形を標本とみなして推定する。

このようにして計算した、パラメータを(3)式とした系に生じる不規則過程  $\{X(t)\}$  の平均値は



オ1図 不規則過程  $\{X(t)\}$  の平均パワースペクトル

$$\begin{aligned}
m_x(t) = & 1.72 \cos t + 0.22 \sin t + 1.21 \cos 3t - 0.26 \sin 3t \\
& + 0.25 \cos 5t - 0.06 \sin 5t + 0.07 \cos 7t - 0.02 \sin 7t \\
& + 0.02 \cos 9t - 0.01 \sin 9t
\end{aligned} \quad (8)$$

である。平均値が周期関数であることは、不規則過程  $\{X(t)\}$  は非定常過程であることを示している。Fig. 1 に (7) 式より計算した平均パワースペクトル  $\Phi_X(\omega)$  を示す。図中  $\omega = 1, 3, 5, \dots$  に存在するインパルス状の線スペクトルは平均値 (8) 式の周期成分をあらわし、スペクトルに付した数値はその周波数に集中するパワーを示している。不規則過程  $\{X(t)\}$  の平均パワーは

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \langle X_T^2(t) \rangle dt \approx 3.07 \quad (9)$$

で与えられる。

上に挙げた Fig. 1, および (9) 式の諸結果は、インダクタンスの非線形特性により、パワーの次元をもっていないことが容易に確かめられる。従ってここでは、単一周波数で供給される電源のパワーが広い周波数範囲にわたって分解される模様を検討する。

コンデンサーの端子電圧

$$v(t) = \frac{B}{\sqrt{1+k^2}} \sin(t + \tan^{-1} k) - y(t) \quad (10)$$

の平均パワーは

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_V(\omega) d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \langle V_T^2(t) \rangle dt \doteq 104.0 \quad (11)$$

であり、平均値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} m_V(t) = & 0.97 \cos t + 13.60 \sin t + 0.77 \cos 3t + 3.63 \sin 3t \\ & + 0.28 \cos 5t + 1.27 \sin 5t + 0.17 \cos 7t + 0.51 \sin 7t \\ & + 0.06 \cos 9t + 0.15 \sin 9t + 0.02 \cos 11t + 0.04 \sin 11t \\ & + 0.00 \cos 13t + 0.01 \sin 13t \end{aligned} \quad (12)$$

★ 図は平均パワースペクトル  $\Phi_V(\omega)$  を示す。\* これから、コンデンサーに並列に接続された抵抗で消散されるパワー  $v^2(t)$  のスペクトル分解が明らかになる。すなわち、単一周波数で供給される電源のパワーはおおよそ、

基本調波成分 89.3 %

★ 3高調波成分 6.6 %

\* この場合の電源電圧は

$$\frac{B}{\sqrt{1+k^2}} \sin(t + \tan^{-1} k) = 1.19 \cos t + 11.88 \sin t$$

であり、電流の平均値は

$$\langle x^3(t) \rangle = 13.70 \cos t + 0.39 \sin t + \dots$$

である。従って、電源の供給する平均パワーは 10.4 である。

不規則成分 3.1%

5高調波成分 0.8%

の割合で各周波数成分に分解され、抵抗で消散されている。

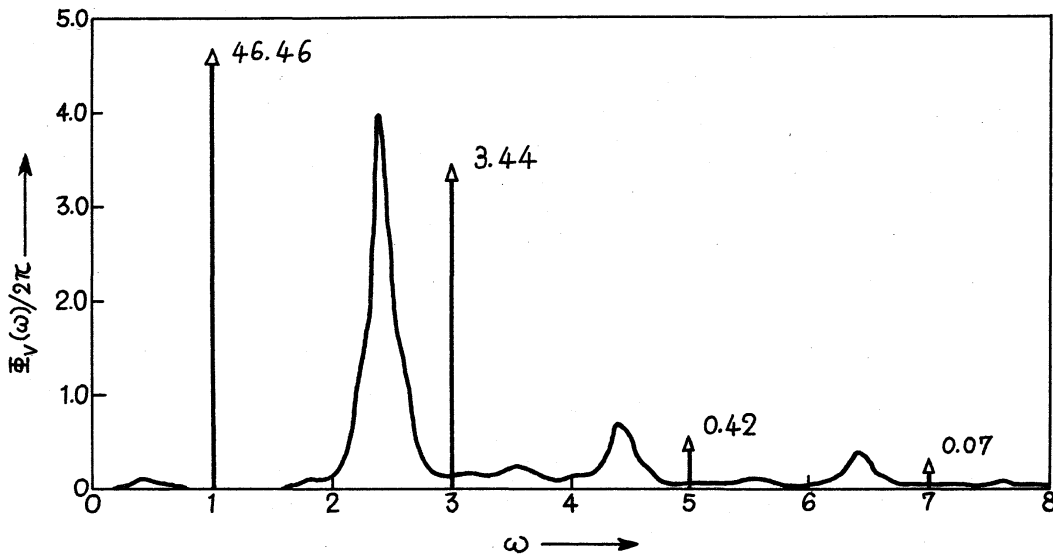


図2 不規則過程  $\{V(t)\}$  の平均パワースペクトル

以上を要約すれば、不規則過程  $\{X(t)\}$  は非定常過程である。  
 $\{X(t)\}$  は線スペクトル ( $\delta$  関数) をもつ平均値  $m_X(t)$  と、連続有限な平均パワースペクトルをもつ不規則過程  $\{R(t)\} = \{X(t) - m_X(t)\}$  に分離される。 $\{R(t)\}$  は  $m_X(t)$  と系の非線形性により結合しているため、周期的非定常過程と考えられる。(3), (4), (5)

不規則過程  $\{X(t)\}$  あるいは  $\{R(t)\}$  の確率統計的性質は系に作用する不確定さの性質よりはむしろ、アトラクターを通

る微分方程式の解の構造に強く依存するものと考えられる。しかし、 $\{X(t)\}$  および  $\{R(t)\}$  の性質の詳細は今後の検討にまたねばならない。

### 文 献

- (1) 上田：非線形振動からの問題提起 2件，オI部，数理研  
講究録 No. 284.
- (2) 上田：非線形インタクダンスをもつ直列共振回路の定常  
振動，電子通信学会回路とシステム理論研究会資  
料 CST. 76-114 (1976-12).
- (3) 小倉：周期的非定常確率過程のスペクトル表現，電子通  
信学会論文誌，53-C，3，133 (1970-3).
- (4) H. Ogura: Spectral Representation of a Periodic Nonstationary  
Random Process, IEEE, IT-17 No. 2, 143 (1971).
- (5) R. L. Stratonovich: Topics in the Theory of Random Noise, 1,  
(1963), English Translation, Gordon and Breach,  
New York - London.