

Stochastic stability of group automorphisms

名大理 森本明彦

§ 距離空間の位相同型写像に対する stochastic stability (定義 2) と位相安定性との関係をのべ、その結果を用いて、Takens の予想 I (§ 2) を証明する。次に群同型写像に対する stochastic stability について調べる。又、 $GL(n+1, \mathbb{R})$ の元 f から導かれる球面写像 $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ 及び射影変換についてものべる。終りに $\text{Diff}^1(S^1)$ について言及する。

§ 1. Bowen 位相同型.

(M, d) をコンパクト距離空間とする。 M から M の上への位相同型写像全体のなす群を $H(M)$ であらわす。

$\varphi \in H(M)$, $x \in M$ に対し、

$$\text{Orb}_\varphi(x) = \{ \varphi^i(x) \mid i \in \mathbb{Z} \},$$

$$O_\varphi(x) = \text{Cl}(\text{Orb}_\varphi(x)) \quad (\text{Cl} : \text{closure})$$

とおく。

定義 1. M の実列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ が φ の δ -pseudo-orbit (簡単に, δ -軌道) であるとは,

$$d(\varphi(x_i), x_{i+1}) \leq \delta \quad (i \in \mathbb{Z})$$

が成立するときをいう。ただし $\delta > 0$ は定数。 φ の δ -軌道全体のなす集合を $\text{Orb}^\delta(\varphi)$ であらわす。

実列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ に対し, 実 $y \in M$ が φ によって, $\{x_i\}$ を ε -追跡する (ε -trace) とは

$$d(\varphi^i(y), x_i) \leq \varepsilon \quad (i \in \mathbb{Z})$$

なる時をいう。ただし $\varepsilon > 0$ は定数。 $\{x_i\}$ を φ によって ε -追跡する実全体のなす集合を $\text{Tr}^\varepsilon(\{x_i\}, \varphi)$ であらわす。

定義 2. $\varphi \in H(M)$ が stochastically stable であるとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ が存在し, 任意の $\{x_i\} \in \text{Orb}^\delta(\varphi)$ に対し, $\text{Tr}^\varepsilon(\{x_i\}, \varphi) \neq \emptyset$ なる時をいう。 δ -pseudo-orbit の概念を (多分, 始めて明確に) 定義した R. Bowen [1] の名前をとって, stochastically stable な φ を Bowen 同相 (写像) とも呼ぶことにする。

定義 3. M の空でない閉部分集合 A の全体からなる集合を $C(M)$ であらわすと, これは次の距離 \bar{d} によって,

コンパクト距離空間になる: $A, B \in C(M)$ に対し,

$$\bar{d}(A, B) = \text{Max} \left\{ \text{Max}_{a \in A} d(a, B), \text{Max}_{b \in B} d(A, b) \right\},$$

$$d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b). \quad (\text{cf. [2]})$$

$$U_\varepsilon(A) = \{x \in M \mid d(x, A) < \varepsilon\} \quad \varepsilon > 0,$$

$$\bar{d}(A, B) = \inf \{ \varepsilon \mid U_\varepsilon(A) \supset B, U_\varepsilon(B) \supset A \}.$$

$O_\varphi(x) \in C(M)$ であるから, $O_\varphi = \mathcal{C} \{ O_\varphi(x) \mid x \in M \} \subset C(M)$ が考えられる. $\therefore O_\varphi \in C(C(M))$ である.

定義4. $\varphi \in H(M)$ に対し,

$$E_\varphi = \{ A \in C(M) \mid \forall \varepsilon > 0 \exists A_\varepsilon \in C(M), \exists \{x_i\} \in \text{Orb}^\delta(\varphi), A_\varepsilon = \mathcal{C} \{x_i \mid i \in \mathbb{Z}\}, \bar{d}(A, A_\varepsilon) < \varepsilon \}$$

と置く. E_φ の元 A のことを φ の extended orbit とし、容易に, $O_\varphi \subset E_\varphi \in C(C(M))$ なることがわかる。

§2. Zeeman の予想と Takens の予想.

M はコンパクト (リーマン) C^∞ 多様体とし,

$$\text{Diff}^1(M) = \{ \varphi \mid \varphi: M \rightarrow M \text{ } C^1\text{-微分同型} \}$$

に C^1 -位相を入れておく。

定義5. 写像 O (resp. E): $\text{Diff}^1(M) \rightarrow C(C(M))$ を $O(\varphi) = O_\varphi$, $E(\varphi) = E_\varphi$, $\varphi \in \text{Diff}^1(M)$ で定義する. 真 $\varphi \in \text{Diff}^1(M)$ において O (resp. E) が連続なる時 φ は tolerance stable (resp. extended tolerance stable) とし、

Zeeman の予想:

“ $\{ \varphi \in \text{Diff}^1(M) \mid \varphi: \text{tolerance stable} \}$ は $\text{Diff}^1(M)$ の中の residual set である.”

即ち “orbits の凡そ状態は generically には連続的に変化するだろう” という予想である。

F. Takens [4] はこの予想の証明を試みているが今までの所成功していない。ただ次のことは証明し、以下の予想をかかっている。

定理 A (Takens).

$\{\varphi \in \text{Diff}^1(M) \mid \varphi: \text{extended tolerance stable}\}$ は $\text{Diff}^1(M)$ の中の residual set である。

従って、次のことが自然な問題になってくる:

問題 1. いかんぞ φ に対し $O_\varphi = E_\varphi$ が成立つか?

以下この等式をみたす φ と OE 同相とよぶことにする。

Takens の予想:

I. “ $\varphi \in \text{Diff}^1(M)$ が AS-微分同型, 即ち公理 A と強横断性条件とをみたせば, φ は OE 同相であろう。”

II. “ $\{\varphi \in \text{Diff}^1(M) \mid O_\varphi = E_\varphi\}$ は $\text{Diff}^1(M)$ の中の residual set であろう。”

これらの予想 I, II に関して次の定理が成立つ。

定理 B [4] $\varphi \in \text{Diff}^1(M)$ が Morse-Smale 微分同型ならば φ は OE 同相である。

定理 C [4] 予想 II が正しいならば, Zeeman の予想も正しい。

まづ、次の補題が成立つ：

補題 1. $\varphi \in H(M)$ が Bowen 同相ならば、OE 同相である。
本講では次の問題を考察したい。

問題 2. いかなる φ は Bowen 同相であるか？

§ 3. 位相安定性と Bowen 位相同型.

M はコンパクト距離空間とする。 M から M の中への連続写像全体のなす集合を $\text{Map}(M)$ であらわし、 $\varphi, \psi \in \text{Map}(M)$ に対し、 $d(\varphi, \psi) = \sup_{x \in M} d(\varphi(x), \psi(x))$ とおく。

定義 6. $\varphi \in H(M)$ が位相安定であるとは、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\delta > 0$ が存在し $d(\varphi, \psi) < \delta$ なる任意の $\psi \in H(M)$ に対し、 $h \in \text{Map}(M)$ を適当にとると、

i) $h \circ \psi = \varphi \circ h$, ii) $d(h, 1_M) < \varepsilon$
とみたすときをいう。

定理 1. M は C^∞ 多様体とし、 $\dim M \geq 3$ とする。

$\varphi \in H(M)$ が位相安定ならば、 φ は Bowen 同相である。

証明. 第 1 段. $\text{Fix}(\varphi) = \{x \in M \mid \varphi(x) = x\}$ とおくと、
 $M - \text{Fix}(\varphi)$ は M の中で dense である。

もし dense でないとするときある空でない開集合 $U \subset M$ が存在して、 $\text{Fix}(\varphi) \cap U = \emptyset$. 点 $x_0 \in U$ と x_0 の中が 4ε の cubic 座標近傍 $V \subset U$ ととる。 V 上の座標系を

$\{x_1, \dots, x_n\}$ とし、中心 x_0 , $\forall \varepsilon > 0$ の cubic 近傍 W とする. ε に対し定義 6 の $\delta > 0$ ととる. W 上では x_1 軸の方向への平行移動, $M-U$ 上では真を動かさない M から M への位相同型 η であって, $d(\eta, 1_M) < \delta$ なるものがとれる. $\psi = \eta \circ \varphi$ とおくと $d(\psi, \varphi) < \delta$ であるから, 定義 6 より $h \in \text{Map}(M)$ が i), ii) をみたすようにとれる. $h \circ \psi^i = \varphi^i \circ h$ ($i=1, 2, \dots$) であるから $h(x_0) \in U_\varepsilon(x_0) \subset U \subset \text{Fix}(\varphi)$ に注意すると, $h \circ \psi^i(x_0) = \varphi^i \circ h(x_0) = h(x_0)$. 他方 i を十分大にとれば, $\psi^i(x_0) \notin W$. $d(h, 1_M) < \varepsilon$ に着目すると矛盾が導かれる.

第 2 段. 任意の $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, 整数 $k > 0$, $\{x_i\} \in \text{Orb}^\delta(\varphi)$ に対し, $\{x'_i\} \in \text{Orb}^{2\delta}(\varphi)$ が存在し, (a) $d(x_i, x'_i) < \delta_1$, (b) $\{\varphi(x'_i), x'_{i+1}\} \cap \{\varphi(x'_j), x'_{j+1}\} = \emptyset$ ($0 \leq i < j \leq k$).

$\exists d(x_i, x'_i) < \delta_1$ ($0 \leq i \leq k$) なる x'_i ととり $x'_i \neq x'_j$ ($0 \leq i < j \leq k$) にできる. 条件 (b) は $0 \leq i < j \leq k-1$ に対し成立したとしよう. $\varphi(x'_k) \in \bigcup_{i=0}^{k-1} \{\varphi(x'_i), x'_{i+1}\}$ なる $\varphi(x'_k) = x'_{i+1}$ なる $i \leq k-1$ がある. $i \leq k-1$ なる $x''_k \in M$ が存在して, $d(x_k, x''_k) < \delta_1$, $\varphi(x''_k) \neq \varphi(x'_k)$. $i=k-1$ なる $\varphi(x'_k) = x'_k$. よって第 1 段より x'_k の近くに x''_k がとれて $\varphi(x''_k) \neq x''_k$. x''_k を改めて x'_k とかくと (b) は $0 \leq i < j \leq k$ に対し成立する.

第3段. $\forall \varepsilon > 0$ に対し定義6の $\delta > 0$ とする. $\forall k > 0$ と固定し, $\{x_i\} \in \text{Orb}^{\frac{\delta}{2}}(\varphi)$ とする. 第2段より $\{x'_i\} \in \text{Orb}^{\delta}(\varphi)$ で $d(x_i, x'_i) < \varepsilon$ 及 (b) とおけるものがとれる. $d(\varphi(x'_i), x'_{i+1}) < \delta$ なることと, $\dim M \geq 3$ なることから, ある $\eta \in H(M)$ が存在し

$$\eta(\varphi(x'_i)) = x'_{i+1} \quad (0 \leq i \leq k), \quad d(\eta, 1_M) < \delta.$$

$\eta \circ \varphi = \psi$ とおくと, $d(\varphi, \psi) < \delta$ であるから, $h \in \text{Map}(M)$ が存在して, $h \circ \psi = \varphi \circ h$, $d(h, 1_M) < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} h(x'_i) = y \quad \text{とおくと, } 0 \leq i \leq k \text{ に対し } d(\varphi^i(y), x_i) \\ = d(\varphi^i h(x'_i), x_i) = d(h \psi^i(x'_i), x_i) = d(h x'_i, x_i) \\ \leq d(h x'_i, x'_i) + d(x'_i, x_i) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

第4段. $\{x_i\} \in \text{Orb}^{\frac{\delta}{2}}(\varphi)$ に対し $\text{Tr}^{2\varepsilon}(\{x_i\}, \varphi) \neq \emptyset$.

任意の整数 $k > 0$ に対し, $y_i = x_{i-k}$ ($i \in \mathbb{Z}$) とおくと $\{y_i\} \in \text{Orb}^{\frac{\delta}{2}}(\varphi)$. 第3段と $\{y_i\}$ と $2k+1$ に適用するとある $y' \in M$ があるとして $d(\varphi^i(y'), y_i) < 2\varepsilon$ ($0 \leq i \leq 2k+1$) が成立つ. $y = \varphi^k(y')$ とおくと $d(\varphi^i(y), x_i) < 2\varepsilon$

($-k \leq i \leq k$) がわかる. y は k に依存するから $y = y(k)$ とかく. $\{y(k) \mid k=1, 2, \dots\}$ の集積点の1つを y とすると $y \in \text{Tr}^{2\varepsilon}(\{x_i\}, \varphi)$ が証明される.

定理2. Takensの予想Iは正しい.

証明. $\varphi \in \text{Diff}^1(M)$ と AS-微分同型とせよ. $\dim M \geq 1$

としてよい。 $\varphi \times \varphi \times \varphi \in \text{Diff}^1(M \times M \times M)$ を考えたと、これも AS-微分同型である。 Nitecki [3] の結果によれば、AS-同型は位相安定である。 よって定理 1. によつて、 $\varphi \times \varphi \times \varphi$ は Bowen 同相である。 所で $\varphi \in H(M)$, $\psi \in H(M')$ のとき $\varphi \times \psi \in H(M \times M')$ が Bowen 同相であるためには φ, ψ が共に Bowen 同相であることが必要十分であることが言える。 よつて、我々の φ は Bowen 同相である。 よつて、補題 1 より φ は OE 同相である。

§ 4. $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ の群同型

次の定理と目標とする：

定理 3. $\varphi: T^n \rightarrow T^n$ と群同型写像とする。 この時、次の条件 1) ~ 5) は同値である。

- 1) φ は Anosov 微分同型である。
- 2) φ は構造安定である。
- 3) φ は Bowen 同相である。
- 4) φ は位相安定である。
- 5) φ は AS 微分同型である。

まづ、次の命題を証明する。 そのため、定義 2 の Bowen 同相は M がコンパクトでなくても定義出来ていることに注意しておく。

命題 1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ とユークリッド空間 \mathbb{R}^n の線型自己同型とすると, f が Bowen 同相であるためには, f が hyperbolic であることが必要十分である.

証明 f は Bowen 同相とすると, $f^{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ と f の複素化とすると $f^{\mathbb{C}} = f \times f: \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ と同一視される. よって $f^{\mathbb{C}}$ も Bowen 同相. $f^{\mathbb{C}}$ の Jordan 標準型を考えると, その各因子も Bowen 同相である. (したがって $\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ とその 1 つの因子とするとこれが Bowen 同相ならば $|\lambda| \neq 1$ なることを言えるが, それは容易である. よって f は hyperbolic である.

逆に f が hyperbolic ならば, よく知られたように, \mathbb{R}^n の部分空間 E^s, E^u , と定数 $C > 0, 0 < \lambda < 1$ が存在して,

$$i) \mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u, \quad f(E^\sigma) = E^\sigma \quad (\sigma = s, u)$$

$$ii) \quad \|f^n v\| \leq C \lambda^n \|v\| \quad v \in E^s, \quad n \geq 0$$

$$\|f^{-n} w\| \leq C \lambda^n \|w\| \quad w \in E^u, \quad n \geq 0$$

が成立する. この分解を用いて f が Bowen 同相であることが直接証明されるのである.

定理 3 の証明の概略:

4) \rightarrow 3) は定理 1 による. 3) \rightarrow 1): $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ と φ の covering homomorphism とすると, f が Bowen 同相なることが証明できる. よって命題 1 より f は hyperbolic.

よって, φ は Anosov 同型に等しいことを知る. 1) \rightarrow 5) は Anosov の closing lemma による. 5) \rightarrow 3) は定理 1 による. 3) \rightarrow 4): f は hyperbolic であるから expansive. よって, φ も expansive であることがわかる. 従って, 次の命題より φ は位相安定である.

命題 2. $\varphi \in H(M)$ が expansive かつ Bowen 同型ならば, φ は位相安定である.

§ 5. Isometries.

定理 4. M は 2 次元以上を含むコンパクト連結距離空間とする. M の isometry φ は決して Bowen 同型には等しくない.

証明 第 1 段. $\Omega(\varphi)$ を φ の nonwandering set とすると $\Omega(\varphi) = M$ が成立する.

第 2 段 $M \in E_\varphi$ (定義 4 参照).

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\{x_i\} \in \text{Orb}^\varepsilon(\varphi)$ が存在し, $A_\varepsilon = \mathbb{Q}\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ とおくと $U_\varepsilon(A_\varepsilon) \supset M$ なることが第 1 段と同じで証明される. 即ち $\bar{d}(M, A_\varepsilon) < \varepsilon$. これより $M \in E_\varphi$.

第 3 段. φ が Bowen 同型であるとして矛盾を出す. $\varepsilon = \text{diam}(M)/7$ とおくと $\varepsilon > 0$. よって $\exists \delta > 0$, $\varepsilon < \delta$, $\forall \{x_i\} \in \text{Orb}^\delta(\varphi)$ は ε -近接される. $U = U_{\delta/2}(x_0)$ とおくと $x_0 \in \Omega(\varphi)$ より $\exists k > 0$, $\varphi^k(U) \cap U \neq \emptyset$. $p_0 \in U$, $\varphi^k(p_0)$

$\in U$ なる p_0 $\varepsilon > 0$. $x_{nk+ic} = \varphi^i(p_0)$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i < k$ と
 $\delta < \varepsilon$ $\{x_i\} \in \text{Orb}^\delta(\varphi)$. $\delta > 0$ $\exists y \in T_r^\varepsilon(\{x_i\}, \varphi)$. 持し
 $d(\varphi^{nk}(y), p_0) \leq \varepsilon$ ($n \in \mathbb{Z}$). $\therefore \psi = \varphi^k, y_n = \psi^n(y)$
 $\delta < \varepsilon$, $y_n \in U_\varepsilon(p_0)$ ($n \in \mathbb{Z}$). ψ は isometry であるから
 $M \in E_\psi$. 更に φ が Bowen 同相であることより ψ も Bowen
 同相である. 補題 1 より $O_\psi = E_\psi$. $\delta > 0$ $M \in O_\psi$. 従って,
 $\exists z \in M$, $(*) \quad \bar{d}(O_\psi(z), M) < \varepsilon$. $y \in M$ と $(*)$
 より $\exists m \in \mathbb{Z}$, $y \in U_\varepsilon(\psi^m(z))$. ψ は isometry であるから,
 $\psi^m(z) \in U_\varepsilon(y) = \psi^n$ の作用で $\psi^n(\psi^m(z)) \in U_\varepsilon(\psi^n(y))$
 $\subset U_{2\varepsilon}(p_0)$. $n \in \mathbb{Z}$ は任意であるから, $\text{Orb}_\psi(z) \subset$
 $U_{2\varepsilon}(p_0)$. 従って $(*)$ より $M \subset U_\varepsilon(O_\psi(z)) \subset U_{3\varepsilon}(x_0)$.
 これから $\text{diam}(M) \leq 6\varepsilon$ が得られ, 矛盾である.

定理 5. G は連結なコンパクト Lie 群とする. 群同型
 $\varphi: G \rightarrow G$ であって, G のあるリ-マノ計量に關し Bowen
 同相である φ が存在すれば, 実は $G \cong T^n$ である.

証明. A (resp. S) と G の極大ア-ベル (半単純) 正規
 部分群とするとき, $G = A \cdot S$ で, $Z = A \cap S$ は有限群であ
 る. 更に $\varphi(A) = A$, $\varphi(S) = S$ が成立する. $\xi = \varphi|_A$, $\eta = \varphi|_S$
 とおく. $\pi: A \times S \rightarrow G$ と $\pi(a, s) = a \cdot s$ ($a \in A, s \in S$)
 で定義すると, π は有限被覆写像であって, $\pi \circ (\xi \times \eta)$
 $= \varphi \circ \pi$ が成立する. このことと, φ が Bowen 同相であること

とより $\xi \times \eta$ が Bowen 同相であることが結論できる。従って、 η は Bowen 同相である。 S の Lie 環の killing 型式 β とすると $-\beta$ は正定値双 1 次形式であって、 η は $-\beta$ と不変になる。よって、 η は $-\beta$ から導かれる S 上の η -Riemann 計量に関して isometry である。定理 4 より $\dim S = 0$, 即ち $S = \{e\}$ となり $G = A \simeq \mathbb{T}^n$ が結論される。

§ 6. 線型球面写像 $\varphi: S^n \rightarrow S^n$

定義 7. $f \in GL(n+1, \mathbb{R})$ に対し $\varphi: S^n \rightarrow S^n$ と $\varphi(x) = f(x) / \|f(x)\|$ ($x \in S^n$) で定義する。 $\varphi = S(f)$ と書けば $S(f \circ g) = S(f) \circ S(g)$, $f, g \in GL(n+1, \mathbb{R})$ がたしかめられる。よって φ は S^n の C^∞ 微分同型である。

φ と f から導かれた線型球面写像と呼ぶことにする。

次の定理は定理 3 と比較すると興味がある。

定理 6. $\varphi = S(f): S^n \rightarrow S^n$ と f から導かれた線型球面写像とする。次の条件 1) ~ 5) は同値である。

- 1) φ は Morse-Smale 微分同型である。
- 2) φ は構造安定である。
- 3) φ は Bowen 同相である。
- 4) φ は位相安定である。
- 5) φ は AS 微分同型である。

また次の命題を証明する (命題1参照).

命題3. $f \in GL(n+1, \mathbb{R})$ の固有値を $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\}$ とする. $\varphi = S(f)$ が Bowen 同相であるための必要十分条件は $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ ($i \neq j$) なることである. またこの条件が満たされていねば φ は Morse-Smale 同相である.

命題3の証明は次の補題を順次証明し, f の実 Jordan 標準型を考察することによって達成される.

補題2. $f = f_1 \times f_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $f_1 \in GL(m, \mathbb{R})$, $f_2 \in GL(n, \mathbb{R})$ とする. $S(f)$ が Bowen 同相ならば, $S(f_1)$, $S(f_2)$ も Bowen 同相である. (逆は成立しない (定理2の証明参照)).

補題3. $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($|\lambda| \neq 1$) ならば $S(f) : S^1 \rightarrow S^1$ は両極微分同相である.

補題4. $f = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ に対して, $S(f)$ は Bowen 同相ではない.

補題5. (i) $f = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ に対して $S(f)$ は Bowen 同相ではない

(ii) $f = \begin{pmatrix} R_\theta & I & & \\ & R_\theta & I & \\ & & \ddots & I \\ & & & R_\theta \end{pmatrix}$, $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

に対して $S(f)$ は Bowen 同相ではない.

定理6の証明は $3) \rightarrow 1) \rightarrow 5) \rightarrow 4) \rightarrow 3)$,
 $2) \rightarrow 3) \rightarrow 5) \rightarrow 2)$ の順に行われる.

定理7. 実(又は複素)射影変換 $\varphi: P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^n(\mathbb{R})$
 $(P^n(\mathbb{C}) \rightarrow P^n(\mathbb{C}))$ に対しては定理6と同様の equivalence
 が成立する.

証明の概略. 実の場合は被覆写像 $\pi: S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ に
 着目し, 定理6に帰着させる.

複素の場合は補題2~5に類似の命題を順次証明すること
 により達成される.

§7. $\text{Diff}^1(S^1)$ について.

定義8. $\varphi \in H(S^1)$ とする. $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$ と仮定
 する. 点 $p \in S^1 - \text{Fix}(\varphi)$ のまわりで $\varphi(p)$ が p から右
 まわりであるか左まわりであるかに応じて, $\rho(p) = +1$ 又は
 $\rho(p) = -1$ とおくことにより, 写像 $\rho: S^1 - \text{Fix}(\varphi) \rightarrow$
 $\{\pm 1\}$ が定義される.

命題4. $\text{Fix}(\varphi) \neq \emptyset$ とする $\varphi \in H(S^1)$ とする.

φ が Bowen 同相であるためには次の条件 i), ii) が必要
 十分である.

i) $S^1 - \text{Fix}(\varphi)$ は S^1 で dense,

ii) $\forall x \in \text{Fix}(\varphi)$ に対し, ある点列 $x_i, x_i' \notin \text{Fix}(\varphi)$

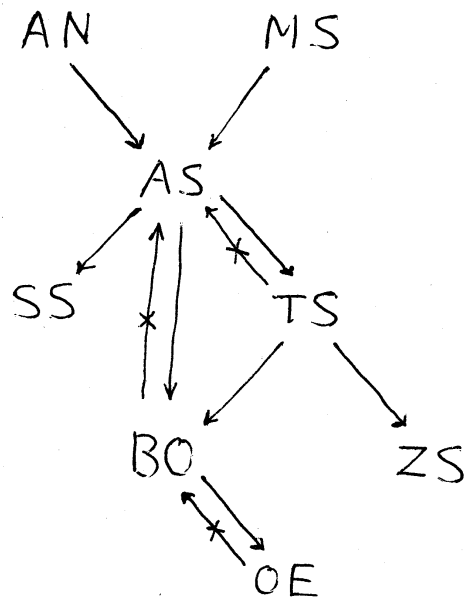
が存在して, $x_i \rightarrow x, x'_i \rightarrow x (i \rightarrow \infty), \rho(x_i) = +1,$
 $\rho(x'_i) = -1 (i=1,2,\dots)$ が成立つ.

定理 8. 定理 1 は任意次元コンパクト多様体 M に対して成立つ.

定理 9. $\varphi \in \text{Diff}^2(S^1)$ に対し, φ が Bowen 同相であるためには, ある整数 $k > 0$ が存在して, φ^k が位相安定であることが必要十分である.

§ 8. 安定性の相互関係.

微分同相に対する種々の安定性の間の相互関係を図示すると次のような状況になっている.



ここで次のように記号を用いた:

AN : Anosov 同相, MS : Morse-Smale 同相

AS : A-S 同相 (§2), SS : 構造安定同相,

TS : 位相安定同相, BO : Bowen 同相 (§1),

ZS : tolerance stable 同相 (§2), OE : OE-同相 (§2).

例へば $BO \rightarrow OE$ は “BO-同相ならば OE 同相である”
 ことを意味し, \nrightarrow は必ずしも \rightarrow でないことを示
 す.

§9. 問題.

本講に関連のあるいくつかの未解決の問題をかかげる.

以下 φ はこゝわり分ければコンパクト多様体の微分同相と
 する.

- (1) BO 同相は $\text{Diff}^1(M)$ の中で generic であるか?
 (注: この問の肯定的な答えは Zeeman の予想は正しい).
- (2) $\varphi \in \text{Diff}^1(S^2)$ で, φ : BO-同相なものを挙げて
 けよ.
- (3) φ : OE 同相なら, 整数 $k > 0$ に対し, φ^k も
 OE 同相となるか? (注: 逆は正しいことが証明される).
- (4) φ : 位相安定なら, φ^k もそうか?
 φ^k : 位相安定なら, φ もそうか?
- (5) φ, ψ : 位相安定なら $\varphi \times \psi$ もそうか? (及その逆).
- (6) M : open リーマン多様体の時, M の isometry で

あつて, BO 同相なるものが存在するか?

(7) $\varphi: BO$ 同相ならば, $\text{Fix}(\varphi)$ は totally disconnected か?

(8) $\varphi: BO$ 同相であつて, 位相安定でないものがあるか?

(9) $\varphi: M \rightarrow M$ が BO 同相, $\Lambda \subset M$ が φ -invariant 閉部分多様体となる時, $\varphi|_{\Lambda}: \Lambda \rightarrow \Lambda$ も BO 同相か?

(10) ZS と OE との関係はどうか?

文献

- [1] R. Bowen, ω -limit sets for Axiom A diffeomorphisms, J. Diff. Eq. 18 (1975), 333-339.
- [2] C. Kuratowski, Topologie II, Warsaw 1961.
- [3] Z. Nitecki, On semi-stability for diffeomorphisms, Inv. Math. 14 (1971), 83-122.
- [4] F. Takens, Tolerance stability, Dyn. Sys.-Warwick, Springer Lect. Notes, No. 468, 1975