数理解析研究所講究録
313巻 1977年 70-75



# Polynomial systems について

名大 教養部　大和 一夫

polynomial system :

$$(*)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y), \end{cases}$$

但し $P, Q$ : $x, y$ の実係数多項式, の定性的性質を調べるために用いられる代数的方法を整理してみたい.

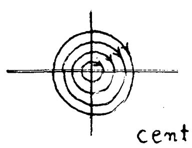
1. center か focus かを見分けること.

$(*)$ が singular point をもち かつそこでの linear part の固有値は純虚とする. このとき $(*)$ は

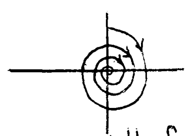
$$(*_0)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + p(x,y), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -x + q(x,y), \end{cases}$$

但し $p, q$ は 2次以上の poly.

としてよい. $(*_0)$ の原点が center か focus かを判別する方法が Poincaré, Liapunov 以来いくつか知られている.

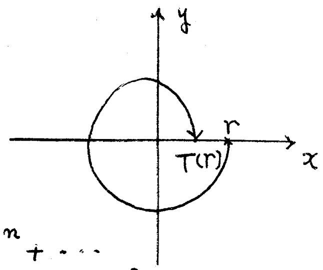


center



stable focus

これらの方法は本質的には同じであるが直観的にとらえやすいLiapunovの方法のひとつを説明する．いわゆるPoincaré map（あるいは trace function, succession function, $\cdots$）$T(r)$ を考える．この $T(r)$ は $r=0$ の近傍で定義された analytic function であることが判り，$r$ の巾級数に展開すると




$$T(r) = r + u_2 r^2 + u_3 r^3 + \cdots + u_n r^n + \cdots .$$

このとき，

(i) $T(r) - r = 0$ の解 $r = r_0$ と $(*_0)$ の periodic sol. が対応．又，$T(r) \equiv r \Leftrightarrow$ 原点は center．さらに，

$$u_2 = u_3 = \cdots = u_{n-1} = 0 \ , \ u_n \neq 0 \ \text{ならば} \ u_n > 0 \ \text{のとき}$$

原点は unstable focus，$u_n < 0$ のとき stable focus．そして常に $n$:奇．

(ii) $u_2, u_3, \cdots$ は $(*_0)$ の右辺の係数の多項式（定数項なし）．$u_2, u_3$ を実際に求めると $u_2 = 0$，

$$u_3 = \Delta \left\{ 3P_{30} + 3Q_{03} + Q_{02}Q_{11} - P_{20}P_{11} + P_{12} + Q_{21} - P_{02}(2Q_{02} + P_{11}) + Q_{20}(2P_{20} + Q_{11}) \right\}$$

但し $P_{ij}, Q_{ij}$ は夫々 $p, q$ の $x^i y^j$ の係数．$\Delta$ は正の定数．

(iii) $\deg p, q = 2$ のとき $(*_0)$ が原点を center とするための条件（i.e., $u_2 = u_3 = \cdots = 0$）は決定されている（Dulac [4], Frommer [6], Bautin [1]）．$p, q$ が3次 homogeneous のときは Sibirskii [10] が決定している．

(iv) Bautin [1] は $\deg p, q = 2$ のとき $T(r)$ の係数 $u_2, u_3, \cdots$ の構造を調べて原点の近傍にあらわれる $(*_0)$ の limit cycles の個数を完全に決定した（それによると3個）. Sibirskii [10] は Bautin のこの方法を $p, q$ が3次 homogeneous のとき適用してこの数が5個になることをしめした.

(v) $(*_0)$ の右辺の degree $n$ によってだけきまる数 $m = m(n)$ (奇) で次の性質をもつものを求めよというのが Siegel の問題 ([12, p.203]) である: $u_2 = u_3 = \cdots = u_m = 0 \Rightarrow u_l = 0 \ \forall l \geqq m+1$.

この数 $m = m(n)$ について次の予想をしたい:

<u>予想</u> $(*_0)$ が $\deg = n$, 原点は center とする. このときこの $(*_0)$ の右辺の多項式 $p, q$ の係数を少し変化させても高々 $\frac{m-1}{2}$ 個の limit cycles しか原点から"出現"しない.

(vi) $\deg p, q = 2$, $(*_0)$ の原点が center のとき $(*_0)$ は初等関数によって積分可能 (Dulac [4], Frommer [6], Lukashevitch [7]) このことから $(*_0)$ が2次のとき center と limit cycle は共存できないことが判る [7]. $p, q$ が3次 homogeneous のときも $(*_0)$ の原点が center のとき $(*_0)$ は初等関数で積分可能 ([9]).

(vii) $(*_0)$ の $\deg \geqq 3$ では center と limit cycle とは共存しうる ([3]).

(viii) center-focus 判定式 $u_1, u_2, \cdots$ と"同値な"他の判定式がこの他に, 極座標にうつらないで直接処理する Poincaré-Frommer-Sadovskii の方法, 複素座標で考える Dulac, Siegel らの方法等がある. これらの関係について Sadovskii [8].

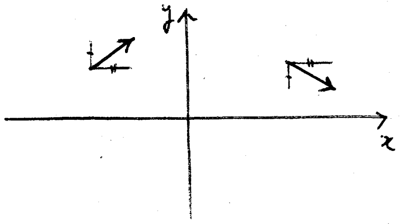
(ix) $(*_0)$ が center をもつための条件 $u_2 = u_3 = \cdots = 0$ を計算機で求める試みもある [13].

## 2. 対称な systems とそれによる比較法.

1によって原理的には $(*)$ の singular point の近傍での定性的性質は理解できるはずであるが平面全体での性質は手がつけられないくらいむつかしい. 例えば 1 の (vi), (vii) のように解を初等的に求めることが出来るならば global な性質は原理的には判る. しかしそうでないときよく使われるのは次の二つの単純な事実による方法である.

(i) $(*_0)$ が対称軸をもてばその対称軸と二度交わる解曲線は閉じている. (例えば $(*)$ が $y$ 軸を対称軸にするとは

$$P(-x, y) = P(x, y),$$
$$Q(-x, y) = -Q(x, y).)$$




(ii) ある poly. system $(*_0)'$ の解がすべて periodic とする. $(*_0)$ に対して"向きの差"の関数

$$\left|(*_0), (*_0)'\right| = \det \begin{vmatrix} y + p(x,y) & y + p'(x,y) \\ -x + q(x,y) & -x + q'(x,y) \end{vmatrix}$$

を考える. 例えば $\left|(*_0), (*_0)'\right|$ が原点以外で 0 でないなら $(*_0)$ は nontrivial periodic sol. をもたない.

3. 与えられた曲線を解曲線にもつ systems の construction.

$H(x,y)=0$ : 与えられた曲線. 曲線 $H(x,y)=0$ を解曲線にもつ system の一般形は

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y(x,y)\cdot J(x,y) + K(x,y), \\ \dot{y} = -H_x(x,y)\cdot J(x,y) + L(x,y). \end{cases}$$

但し, $K(x,y) = L(x,y) = 0$ on $H(x,y)=0$,

$J(x,y) \neq 0$ on $H(x,y) = 0$,

である (Erugin [5]). 例えば $x^2+y^2=1$ を sol. とする 2次の polynomial system の一般形は

$$\begin{cases} \dot{x} = y(ax+by+c) + x^2+y^2-1 \\ \dot{y} = -x(ax+by+c), \qquad c^2 > a^2+b^2, \end{cases}$$

あるいはこれを回転させたもの (Chin Yuan-Shun [2]).

これは 2 の方法より $a \neq 0$ のとき $x^2+y^2=1$ は limit cycle になることがわかる. ($a>0$ のとき stable limit cycle, $a<0$ のとき unstable limit cycle)

4. Sibirskii の invariant method [11].

原点を singular point にもつ polynomial system of degree $n$ 全体の集合を $\mathbb{R}^N$ と同一視する. 今, これに属する polynomial system $X$ を $xy$-平面を回転した座標であらわすと他の polynomial system $X'$ が得られる. もちろん $X$ と $X'$ は

equivalent. よって $X$ に対応する $\mathbb{R}^N$ の点と $X'$ に対応する $\mathbb{R}^N$ の点を同一視すると空間 $\mathbb{R}^N/\sim$ がえられる. polynomial systems を分類することは $\mathbb{R}^N/\sim$ の, ある部分集合への分割を調べること. Sibirskii は polynomial functions

$$\mathbb{R}^N/\sim \ \longrightarrow \mathbb{R}$$

の生成元をきめて, この言葉を用いてその分割の部分集合を記述しようとしている.

## Reference


[1] Bautin : Amer. Math. Soc. Transl. (1), 5, 396-413.

[2] Chin Yuan-Shun : Act. Math. Sinica, 8 (1958), 23-35.

[3] Dolov : Diff. Eq., 8 (1972), 1304-1305.

[4] Dulac : Bull. Sci. Math., 32 (1908), 230-252.

[5] Erugin : Akad. Nauk SSSR, Prikl. Mat. Mech., 16 (1952), 659-670.

[6] Frommer : Math. Ann., 109 (1934), 395-424.

[7] Lukashevitch : Diff. Eq., 1 (1965), 60-70.

[8] Sadovskii : Diff. Eq., 9 (1973), 494-501.

[9] Sadovskii : Diff. Eq., 10 (1974), 425-427.

[10] Sibirskii : Diff. Eq., 1 (1965), 36-49.

[11] Sibirskii : Diff. Eq., 2 (1966), 384-392, 472-477.

[12] Siegel & Moser : Lectures on Celestial Mechanics (1971).

[13] Šeuko . Sov. Math. Dokl. 13 (1972), 505-508.


その他 polynomial systems に関する文献は, Sibirskii : The invariant method in the qualitative theory of Diff. Eqs, Kishinev (1968) 及び Sansone & Conti : Nonlinear diff. Eqs (1964) の bibliography を参照.