

commutation theorem をめぐりくつかの話題

山形大 理 富山 淳

§1. まえがき.  $N_1, N_2$  をヒルベルト空間  $H_1, H_2$  上の von Neumann 環とし, そのテンソル積を  $N_1 \otimes N_2$  とかくことにする. この時一般に commutation theorem と言われている次の関係

$$(N_1 \otimes N_2)' = N_1' \overline{\otimes} N_2'$$

が成立する. この結果は富田-竹崎理論の帰結として富田によつて初めて一般的に証明されて以来種々な単純化又は一般化が試みられてゐる. ここで述べたものと異つた slice map によるこの定理の解釈をとりあげる. この形により定理は各種のテンソル積における固有値問題を統一的に含むことになる. この講演はその中で2つの場合をとりあげて考へてみることにする.

§2. von Neumann 環の commutation theorem の変形

$M_1, M_2 \in$  von Neumann 環,  $N_1, N_2 \in$  その von Neumann 部分環とする. このとき  $N_1 \otimes N_2$  は  $M_1 \otimes M_2$  の部分環と見られる. 今  $\varphi \in M_1$  上の  $\sigma$ -weakly 連続な汎関数としたとき  $M_1 \otimes M_2$  より  $M_2$  への右 slice map  $R_\varphi \in$

$$R_\varphi(a \otimes b) = \langle a, \varphi \rangle b$$

で定義する.  $R_\varphi$  は  $\sigma$ -位相で連続な線形写像である. ([8], [9] 等) 同様に  $M_2$  上の  $\sigma$ -weakly continuous な汎関数  $\psi$  に対しては左 slice map

$$L_\psi : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow M_1 \quad L_\psi(a \otimes b) = \langle b, \psi \rangle a$$

が定義出来る. この写像は次の性質をもっている

$$(1) \quad R_\varphi((1 \otimes a) x (1 \otimes b)) = a R_\varphi(x) b \quad a, b \in M_2$$

$$L_\psi((c \otimes 1) x (d \otimes 1)) = c L_\psi(x) d \quad c, d \in M_1$$

$$(2) \quad \langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle x, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

$$x \in M_1 \otimes M_2.$$

(3)  $\{R_\varphi \mid \varphi \in M_{1*}\}, \{L_\psi \mid \psi \in M_{2*}\}$  は共に  $M_1 \otimes M_2$  上で total である. 即ち

$$R_\varphi(x) = 0 \quad \forall \varphi \in M_{1*} \quad \text{ならば} \quad x = 0.$$

$M_1, M_2$  が空間  $H_1, H_2$  に作用しているとしたときの有界線形作用素をつくる von Neumann 環を  $B(H_1), B(H_2)$  とし  $B(H_1) \otimes B(H_2)$  と見ると,  $\varphi \in M_{1*}$  の  $B(H_1)$  上への  $\sigma$ -weakly 連続な汎関数としての拡大を  $\hat{\varphi}$  とすれば, slice map  $R_{\hat{\varphi}}$  の

$M_1 \otimes M_2$  への制限は  $R_\varphi$  にほかならぬ。

$$\mathcal{K}(M_1, N_2) = \{x \in M_1 \otimes M_2 \mid R_\varphi(x) \in N_2, L_\psi(x) \in N_1, \\ \varphi \in M_{1*}, \psi \in M_{2*}\}$$

と置く。次の結果は commutation theorem のオーソ変形である。( [8], [6] )

定理 2.1 (  $W^*$ -slice map の定理 )

$$\mathcal{K}(N_1, N_2) = N_1 \otimes N_2.$$

この結果は  $M_1 = B(H_1)$ ,  $M_2 = B(H_2)$  の時は slice map の前述の性質からわかるように

$$\mathcal{K}(N_1, N_2) = (N_1' \otimes N_2')'$$

と置くことから、実は commutation theorem と同値な命題になっている。テンソル積の問題は上の定理の形になることが多い。

さて  $M_1 \otimes M_2$  の  $\sigma$ -位相で連続な汎関数の全体, predual はよく知られているように  $M_1, M_2$  の predual  $M_{1*}, M_{2*}$  の汎関数のノルム 4 で  $\sigma$ -テンソル積  $M_{1*} \otimes M_{2*}$  と一致する。  $M_{1*} \otimes M_{2*}$  を代数的な  $\sigma$ -テンソル積の部分とする。  $(N_1 \otimes N_2)_*$  の元はノルム 4 を保存して  $(M_1 \otimes M_2)_*$  の元にして拡大出来るわけであり、代数的な  $\sigma$ -テンソル積に限ると、上の結果から次のことが成立する。

定理 2.2  $r > 1$  を固定する。この時任意の汎関数

$$\omega \in M_{1*} \otimes M_{2*} \text{ は } M_{1*} \otimes M_{2*} \text{ 内への拡大 } \hat{\omega}, \|\hat{\omega}\| \leq r \|\omega\|$$

をもち。

証明は定理 2.1 から  $M_{1*} \otimes N_2^0 + N_1^0 \otimes M_{2*}^0$  が  $M_{1*} \otimes M_{2*}$  での  $N_1 \otimes N_2$  の polar  $(N_1 \otimes N_2)^0$  の中で  $\rho$  の  $\rho$  dense であることがきとるから、はじめに  $\omega$  の  $\rho$  を保存した拡大  $\hat{\omega}$  と  $M_{1*} \otimes M_{2*}$  への任意の拡大  $\hat{\omega}'$  をとり  $\hat{\omega} - \hat{\omega}' \in (N_1 \otimes N_2)^0$  の形を上のことと調整すればよい。

上の結果は又 commutation theorem のオニの変形でこの定理から commutation theorem を得ることも出来る。すなわち  $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \varphi \in N_{1*}$  の  $M_1$  への拡大,  $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \psi \in N_{2*}$  の  $M_2$  への拡大とすると、 $x \in \mathcal{K}(N_1, N_2)$  に対して

$$\begin{aligned} \langle x, \hat{\varphi} \otimes \tilde{\psi} \rangle &= \langle R_{\hat{\varphi}}(x), \tilde{\psi} \rangle = \langle R_{\hat{\varphi}}(x), \tilde{\psi} \rangle \\ &= \langle L_{\tilde{\psi}}(x), \hat{\varphi} \rangle = \langle L_{\tilde{\psi}}(x), \hat{\varphi} \rangle = \langle x, \tilde{\varphi} \otimes \hat{\psi} \rangle \end{aligned}$$

即ち、 $\varphi \otimes \psi$  は  $\mathcal{K}(N_1, N_2)$  上では product functional としての拡大は一意的である。よって又  $M_{1*} \otimes M_{2*}$  の元の形としての拡大も一意に定まる。従って任意の  $\omega \in N_{1*} \otimes N_{2*}$  に対して  $\omega$  の拡大  $\hat{\omega} \in \mathcal{K}(N_1, N_2)$  ( $\hat{\omega} \in M_{1*} \otimes M_{2*}$ ) は一意である。よって今上の  $\hat{\omega}$  を  $\|\hat{\omega}\| \leq h \|\omega\|$  ととりとくと、 $\mathcal{K}(N_1, N_2)$  の元は

$$\begin{aligned} \omega = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes \psi_i \in N_{1*} \otimes N_{2*} &\longrightarrow \hat{\omega} = \sum_{j=1}^m \sigma_j \otimes \tau_j \in M_{1*} \otimes M_{2*} \\ \longrightarrow \langle x, \hat{\omega} \rangle &= \sum_{j=1}^m \langle x, \sigma_j \otimes \tau_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, \hat{\varphi}_i \otimes \tilde{\psi}_i \rangle \end{aligned}$$

よって  $N_{1*} \otimes N_{2*}$  上の有界線型汎関数を定義する。よって

$N_1 \otimes N_2$  の元  $y$  があつて

$$\langle x, \hat{\omega} \rangle = \langle y, \omega \rangle \quad \forall \omega \in N_{1*} \otimes N_{2*}$$

これから  $x = y \in N_1 \otimes N_2$  で定理 2.1 が得られる。

定理 2.2 は Wassermann [16] による。上のようちんは特別な時、例えば  $N_1, N_2$  上へ  $M_1, M_2$  から normal な  $1 \times 1$  の射影写像があつたと<sup>き</sup>は  $k=1$  としてとることが出来るが一般には無理である。

以下に commutation theorem をもっと一般的に考へようとするのは定理 2.1 の形である。

§3. von Neumann 環の  $C^*$ -テンソル積の場合。前節と同じ設定で (spacial な)  $C^*$ -テンソル積  $B(H_1) \otimes B(H_2)$  を考へる。  $M_1 \otimes M_2$  は  $B(H_1) \otimes B(H_2)$  の  $C^*$ -部分環である。この時  $B(H_1)$  及び  $B(H_2)$  上の有界線型汎関数  $\varphi, \psi$  に対してそれぞれ  $1 \times 1$  連続な右, 左の slice map  $R_\varphi, L_\psi$  が定義出来る。そして  $R_\varphi, L_\psi$  を  $M_1 \otimes M_2$  に制限したものは又  $M_1, M_2$  上の汎関数  $\varphi|_{M_1}, \psi|_{M_2}$  による slice map と考へよう。

定理 2.1 と連関してこの時自然に考へようとするのは次の問題である。即ち

$$F(M_1, M_2) = \{ x \in B(H_1) \otimes B(H_2) \mid R_\varphi(x) \in M_2, L_\psi(x) \in M_1 \}$$

$$\{\varphi \in B(H_1)^*, \psi \in B(H_2)^*\}$$

とふくとき  $F(M_1, M_2)$  は  $M_1 \otimes M_2$  と一致するであろうか?

これについては先ず  $F(M_1, M_2)$  が  $C^*$ -環であること(実際 commutation theorem から)

$$F(M_1, M_2) = M_1 \bar{\otimes} M_2 \cap B(H_1) \bar{\otimes} B(H_2)$$

と成る) や  $M_1, M_2$  が injective な von Neumann 環の時には一致することがわかつているが ([9]), 一般にどう成るかは知られていない。しかし次のことが成立つ。

定理 3.1  $F(M_1, M_2)$  は  $M_1, M_2$  の表現空間  $H_1, H_2$  に依存しない。

証明は富山 [11] にゆずる。

上の問題は結局  $M_1 \bar{\otimes} M_2$  と  $M_1 \otimes M_2$  との違いが一般には両者が一致しないこと以外に現在何もわかっていないことに起因している。  $M_1 \bar{\otimes} M_2$  のところを  $M_1 \otimes M_2$  に入っているかもしよる判定条件がみつかるかは興味のあることと思われるが以下にその一つの candidate をのべてみる。  $M_1$  上の通常の有界線型汎関数  $\varphi$  をとり、  $x \in M_1 \bar{\otimes} M_2$  を固定すると

$$\langle \varphi, f_{\varphi, x} \rangle = \langle L_{\varphi}(x), \varphi \rangle$$

に  $\varphi$  は  $M_{2*}$  上の有界線型汎関数  $f_{\varphi, x}$  を定義する。従って  $M_2$  の元  $R_{\varphi}(x)$  が存在して、任意の  $\psi \in M_{2*}$  に対して

$$\langle L_{\varphi}(x), \psi \rangle = \langle \psi, f_{\varphi, x} \rangle = \langle R_{\varphi}(x), \psi \rangle$$

と取る。つくり方が  $R_\varphi: x \rightarrow R_\varphi(x)$  は  $M_1 \otimes M_2$  上のノルム連続な slice map の  $M_1 \otimes M_2$  への拡大である。この  $R_\varphi$  を一般化した slice map と呼ぶことにする。ここで  $L^*$ -ノルム積  $M_1 \otimes M_2$  の元  $x$  に対しては

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle$$

が任意の  $\varphi \in M_1^*$ ,  $\psi \in M_2^*$  に対して成り立つが一般の  $M_1 \otimes M_2$  の元に対しては上のつくり方が  $\{\varphi \in M_1^*, \psi \in M_2^*\}$  又は  $\{\varphi \in M_1^*, \psi \in M_2^*\}$  と二組合せの時に成り立つことがわかる。もし固定した  $\varphi \in M_1^*$  に対して上のことが任意の  $\psi \in M_2^*$  及び  $x \in M_1 \otimes M_2$  に対して成り立つならば  $\varphi$  は一般には  $\sigma$ -weakly continuous になるとして予了 ([9; 定理 5.1])。従って上の算式 (Fubini principle と呼ぶ) は我々の問題に関係が深いと推察されるが上の式を  $M_1$  が右と可換の時でも  $x$  が  $M_1 \otimes M_2$  の元であるとは保証出来ない。従って次の candidate として以下の条件を考へる。

(\*)  $\varphi \in M_1^* \rightarrow R_\varphi(x) \in M_2$  は、 $M_1^*$  の単位球上で  $M_1^*$  に汎弱位相,  $M_2$  にノルム位相を考へたとき連続である。

これは又  $x$  に対して写像  $\psi \in M_2^* \rightarrow L_\psi(x) \in M_1$  が上のよりの形で連続である、と二つのことと同値になっている。

命題 3.2.  $M_1$  が type  $I_n$  型の有限和の時 ( $M_2$  は任意である)。(\*) の条件は  $M_1 \otimes M_2$  の元が  $M_1 \otimes M_2$  に入るための判

定条件を与えてゐる。

証明. 先ず  $M_1$  が可換な時は (\*) は又が  $M_1$  の character の空間上の  $M_2$ -valued 連続関数をひき起すことを示してゐるから,  $M_1 \otimes M_2$  の連続関数環としての characterization から結論が得られる。

次に  $M_1 = A \otimes M_n = A \otimes M_n$  ( $A$  は可換な von Neumann 環,  $M_n$  は  $n \times n$  の行列環) の時は,  $\{e_{ij}\}$  を  $M_n$  の matrix units  $\{\varphi_{ij}\}$  をその dual 連続関数の系とする.  $t \in A$  の character とすると  $R_t(x) \in M_n \otimes M_2$  は  $M_2$  上の matrix  $(R_{\varphi_{ij}}(R_t(x)))$  とする.  $A_*$  の単位球は  $A^*$  の単位球内で汎弱稠密になつてゐるから ([6; 定理 1])  $\{\varphi_\alpha\} \subset A_*$  を  $t$  に弱収束するよりにとると, 任意の  $\psi \in M_{2*}$  には

$$\langle R_{\varphi_{ij}}(R_t(x)), \psi \rangle = \langle R_t(x), \varphi_{ij} \otimes \psi \rangle = \langle L_{\varphi_{ij} \otimes \psi}(x), t \rangle$$

$$= \lim_{\alpha} \langle L_{\varphi_{ij} \otimes \psi}(x), \varphi_\alpha \rangle = \lim_{\alpha} \langle x, \varphi_\alpha \otimes \varphi_{ij} \otimes \psi \rangle$$

$$= \lim_{\alpha} \langle R_{\varphi_\alpha \otimes \varphi_{ij}}(x), \psi \rangle = \langle R_{t \otimes \varphi_{ij}}(x), \psi \rangle$$

よつて  $t \rightarrow R_{t \otimes \varphi_{ij}}(x) = R_{\varphi_{ij}}(R_t(x))$  は  $t$  に  $\psi$  に対して  $M_n \otimes M_2$ -valued 連続関数であり, 従つて matrix 関数  $t \rightarrow R_t(x)$  も  $M_n \otimes M_2$ -valued 連続関数になる. よつて又は

$M_1 \otimes M_2 = A \otimes (M_n \otimes M_2)$  の元である.  $M_1$  が上の形の環の有限和の時にはこれをみ直せばよい. 証明了.

(\*) に  $\psi$  に対しては前に述べた  $M_1 \otimes M_2$  から  $F(M_1, M_2)$  (以下

$M_1, M_2$  の  $B(H_1) \otimes B(H_2)$  に属する Fubini 積と呼ぶこととする)

への product functional  $\varphi \otimes \psi$  の拡大の一途は  $F(M_1, M_2)$

の元について  $\varphi \in M_1^* \rightarrow R_\varphi(x)$  (値は  $\varphi$  の拡大  $\hat{\varphi}$  に依

存し) が (\*) を満たすことがわかつてくる。従って (\*) の

条件は前の  $F(M_1, M_2) = M_1 \otimes M_2$  ? の問題と密接に関係して

いるわけである。  $F(M_1, M_2)$  は又次のように受けとり方も出来

る。  $M_1 \otimes M_2$  は  $M_1 \otimes M_2$  の  $B(H_1 \otimes H_2)$  での locally convex 位

相による閉包であった。この形でラニソル積の他の例は

multiplier でも考えよう。即ち  $A, B$  を一般に単位元をもた

ない  $C^*$ -環としたとき  $A \otimes B$  の multiplier  $M(A \otimes B)$  はほとん

どの場合  $M(A) \otimes M(B)$  と一致しちることが知られてくる ([C])

がこの状況は  $M(A \otimes B)$  が  $M(A) \otimes M(B)$  の  $A \otimes B$  による strict

Topology による閉包として定義された別種のラニソル積と考

えれば、同じ閉包である  $M(A) \otimes M(B)$  と一致しちるのは、

$M_1 \otimes M_2$  と  $M_1 \otimes M_2$  の時と同じく、むしろ当然であると考えら

れる。  $F(M_1, M_2)$  が  $M_1 \otimes M_2$  と一般に一致しちるのであれば、

この  $M_1$  と  $M_2$  のラニソル積として考えるべきであることが

わか  $M_1 \otimes M_2$  の何らかの閉包と考えらるのかどうか分る所

は何もわかつてはいない。

文献は共通文献の項に記載