数理解析研究所講究録
314巻 1977年 27-35

Injective envelopes of operator systems

東北大 理 浜名 正道

線型空間 V は，それがある Hilbert 空間 H 上の全ての有界線型作用素が作る C^*-代数 $B(H)$ の線型部分空間となっていて，

$$V^* \equiv \{v^* ; v \in V\} = V, \quad 1 \in V \ (1;\ \text{恒等作用素})$$

を満たしているとき，<u>operator system</u> と呼ばれる．Choi-Effros [2] は operator systems と completely positive linear maps の作る category $\mathcal{C}$ において injectivity を次のように定義した： $V \in \mathcal{C}$ が <u>injective</u> であるとは，任意の $M, N \in \mathcal{C}$, $M \subset N$ に対し，任意の completely positive map $\alpha : M \longrightarrow V$ が completely positive map $\hat{\alpha} : N \longrightarrow V$ に拡張できるときをいう．

ここでは任意に与えられた operator system V を含む injective operator system (resp. unital C^*-algebra) の中で minimal なもの —— それを V の injective envelope (resp. C^*-envelope) と呼ぶ —— が一意に存在することを示す．また

Arveson [1] の意味での Šilov boundary の存在を示し, unital C^*-algebra A に対し A の injective envelope と A の (J. D. M. Wright [6] の意味での) regular σ-completion との間の関係を調べる.

1. <u>定義</u>. operator systems $V \subset B(H)$, $W \subset B(K)$ に対し, linear map $\varphi : V \longrightarrow W$ が 1対1, into (resp. onto) で φ, $\varphi^{-1} : \varphi(V) \longrightarrow V$ がともに completely positive のとき, φ を <u>complete order injection</u> (resp. <u>complete order isomorphism</u>) と呼ぶ. 固定した operator system V に対し, operator system W と unital (= unit-preserving) complete order injection $\varkappa : V \longrightarrow W$ との pair $(W, \varkappa)$ を V の <u>extension</u> と呼ぶ. 特に W が injective operator system (resp. unital C^*-algebra であって $\varkappa(V) \subset W$ によって C^*-algebra として生成されている) のとき, $(W, \varkappa)$ を <u>injective</u> (resp. <u>C^*-</u>) <u>extension</u> という. V の 2つの extensions $(W_1, \varkappa_1)$, $(W_2, \varkappa_2)$ が <u>同値</u> である [$(W_1, \varkappa_1) \sim (W_2, \varkappa_2)$ と書く] とは, unital complete order isomorphism $\iota : W_1 \longrightarrow W_2$ が存在し, $\iota \circ \varkappa_1 = \varkappa_2$ をみたすときをいう.

2. <u>結果</u>.

<u>Theorem 1.</u> 任意の operator system V に対し，次の性質を満たす injective (resp. C^*-) extension $(B, \varkappa)$ [resp. $(A, \varkappa)$] が同値関係 $\sim$ を除いて一意に定まる．

(i) B は injective C^*-algebra，A はその C^*-subalgebra であり，$\varkappa(V) \subset A \subset B$．

(ii) 任意の V の injective extension (W, λ) [resp. C^*-extension (C, μ)] に対し，unital complete order injection $\iota: B \longrightarrow W$ が存在し，$\iota\circ\varkappa = \lambda$ を満たす [resp. onto $*$-homomorphism $\pi: C \longrightarrow A$ が存在し，$\pi\circ\mu = \varkappa$ を満たす；従って

$$(C/\mathrm{Ker}\,\pi,\ q\circ\pi) \sim (A,\ \varkappa)$$

ここで $q: C \longrightarrow C/\mathrm{Ker}\,\pi$ は quotient homomorphism を表わす]．

この $(B, \varkappa)$ [resp. $(A, \varkappa)$] を V の injective (resp. C^*-) envelope と呼ぶ．unital C^*-algebras の間の unital complete order isomorphism は必然的に $*$-isomorphism になるので，B, A は C^*-algebras として unique である．

<u>Corollary.</u> V を unital C^*-algebra C の linear subspace で 1 を含み，C を C^*-algebra として生成しているようなも

のとする．そのとき Arveson [1] の意味での *Šilov boundary* J *for* V が存在する，*i.e.*, J は C の *closed two-sided ideal* であり，*canonical map* $V \hookrightarrow C \longrightarrow C/J$ が *completely isometric* になる；しかも J はこの性質をもつ C の *closed two-sided ideals* の中で最大である．

A を *unital* C^*-*algebra*, (B, κ) をその *injective envelope* とする．以下で A と B との関係を調べよう．A が C^*-*algebra* だから A の C^*-*envelope* は A それ自身と一致し，$\kappa : A \longrightarrow \kappa(A) \subset B$ が $*$-*monomorphism* (1 to 1 $*$-*homomorphism*) となることがわかるが，更に

<u>Proposition 2.</u> κ は *suprema* を保存する，*i.e.*, $A_{s.a.}$ の部分集合 $\mathcal{F}$ に対し $\sup \mathcal{F}$, $\sup \kappa(\mathcal{F})$ がそれぞれ A, B において存在すれば，

$$\kappa(\sup \mathcal{F}) = \sup \kappa(\mathcal{F}).$$

[B は *injective* だから，*monotone complete* である．従って $\mathcal{F}$ が *increasing net* である場合には，" $\sup \kappa(\mathcal{F})$ が B において存在する" という仮定は（必然的に満たされるので）不要である．]

次の *Lemma* は容易に証明される：

<u>*Lemma 1.*</u> D を任意の unital C^*-algebra, C をその $1\in D$ を含む C^*-subalgebra とし

$$N \equiv \{x\in D^+ ;\ \exists \text{ a subset } \mathcal{F} \text{ of } C^+ \text{ s.t. } \exists \inf \mathcal{F} (\text{in } C) = 0 \text{ and } 0 \le x \le y \text{ for } \forall y \in \mathcal{F}\}$$

とおくと

(i) N は D の closed order ideal であり $C\cap N = \{0\}$, 更に C の任意の unitary element u に対し $uNu^* = N$; 従って

(ii) I を N の linear span とすると $C\cap I = \{0\}$, $C+I$ は D の C^*-subalgebra, I は $C+I$ の closed two-sided ideal である.

この Lemma を B と $\varkappa(A)\subset B$ に対し適用する. そのとき $(B, \varkappa)$ が A の injective envelope という条件から上述の $I = \{0\}$, 従って $N = \{0\}$ が示せる. これが命題の主張に外ならない.

上述のように B は monotone complete である. そこで $\varkappa(A)\subset B$ によって σ-generate される B の linear subspace C が考えられる: $C = C_{s.a.} + i\, C_{s.a.}$, $C_{s.a.}$ は $\varkappa(A)_{s.a.}$ を含む B の最小の σ-closed linear subspace である. そのとき

<u>Proposition 3.</u> $(C, \varkappa)$ は J. D. M. Wright [6] の意味での A の regular σ-completion である, i.e., C は σ-complete C^*-algebra であり, $\varkappa$ は次の性質を満たす:
(i) (a_n) が $A_{s.a.}$ の任意の減少列で $\inf a_n$ (in A) $= 0$ ならば $\inf \varkappa(a_n)$ (in C) $= 0$; (ii) 任意の $c \in C_{s.a.}$ に対し $\sup\{\varkappa(a) : a \in A_{s.a.},\ \varkappa(a) \leq c\} = c$.

任意の unital C^*-algebra に対しその regular σ-completion の存在と一意性が J. D. M. Wright [6] によって証明されている.

<u>Lemma 2.</u> A の regular σ-completion を (D, α) とし M_n を $n \times n$ 複素行列環とすると $(D \otimes M_n, \alpha \otimes id)$ は $A \otimes M_n$ の regular σ-completion に含まれる ($\alpha \otimes id : A \otimes M_n \longrightarrow D \otimes M_n$, $id =$ identity map on M_n), i.e., $D \otimes M_n$ を含む C^*-algebra E が存在して $(E, \alpha \otimes id)$ が $A \otimes M_n$ の regular σ-completion となる.

<u>Lemma 3.</u> $\alpha|_{A_{s.a.}} : A_{s.a.} \longrightarrow D_{s.a.}$ は次の性質をもつ: 任意の real Banach space X, contractive linear map $\beta : D_{s.a.} \longrightarrow X$ に対し $\beta \circ \alpha : A_{s.a.} \longrightarrow X$ が isometric ならば β も isometric である.

Proposition 3 の証明: B が injective だから completely positive map $\lambda : D \longrightarrow B$ が存在し $\lambda \circ \alpha = \varkappa$ をみたす。この λ が complete order injection であることを示す: $\lambda \otimes id|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}} : (D\otimes M_n)_{s.a.} \longrightarrow (B\otimes M_n)_{s.a.}$ は contractive であり $(\lambda\otimes id)\circ(\alpha\otimes id)|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}} = (\varkappa\otimes id)|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}}$ は isometric である. 従って $A\otimes M_n$ と $A\otimes M_n$ の regular σ-completion に対し Lemma 3 を適用し更に Lemma 2 に注意すると $\lambda\otimes id|_{(D\otimes M_n)_{s.a.}}$ が任意の n に対し isometric であることがわかる. これから λ が complete order injection 従って $*$-monomorphism となることが示せる. また Proposition 2 より $\lambda(D) = C$ である. 従って $(D, \alpha) \sim (C, \varkappa)$.

Proposition 4. A が simple ならば B もまた simple である; 従って特に B は AW^*-factor である.

A が separable, infinite dimensional かつ simple ならば B は σ-finite, non W^*, AW^*-factor of type III である.

Proof. $(B, \varkappa)$ が injective envelope であることから次の性質をみたす B の seminorm p は B の norm と一致することがわかる:

$$p(x) \leqq \|x\|, \quad p(\varkappa(a)\, x\, \varkappa(b)) \leqq \|a\|\, p(x)\, \|b\|$$
$$p(\varkappa(a)) = \|a\| \quad (a, b \in A, \ x \in B).$$

B の simplicity を示すために B の proper closed two-sided ideal I をとる。$\pi: B \longrightarrow B/I$ を canonical homomorphism とし $p(x) = \|\pi(x)\|$ $(x \in B)$ とおく。そのとき A の simplicity と $1 \in A$ を使うと p が上の条件をみたすことが示せ，従って $I = \{0\}$ が示せる。

separable infinite dimensional simple unital C^*-algebra の regular σ-completion が non W^*-, AW^*-factor of type III であることが知られている[7]。従って Proposition 3 より B が non W^*-, AW^*-factor of type III を AW^*-subalgebra として含むことがわかる。従って B は non W^*, type III となる。更に A が separable であることから B が faithful state をもつことが示せ，B の σ-finiteness が従う。

References

[1] W. Arveson, Subalgebras of C*-algebras, Acta Math., 123 (1969), 141-224.

[2] M.-D. Choi and E. G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Functional Analysis, 24 (1977), 156-209.

[3] H. B. Cohen, Injective envelopes of Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 723-726.

[4] M. Hamana, Injective envelopes of C*-algebras, preprint.

[5] ————, Injective envelopes of operator systems, preprint.

[6] J. D. M. Wright, Regular σ-completions of C*-algebras, J. London Math. Soc., 12 (1976), 299-309.

[7] J. D. M. Wright, Wild AW*-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London Math. Soc., 13 (1976), 83-89.