

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr} + \lambda e^u = 0 \quad (1.1)$$

大阪市立大 理 龜高 惟倫
牧野 哲

§1 問題の設定と主な結果

問題 I. 2階非線型常微分方程式

$$(1.1) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{du}{dr} + \lambda e^u = 0$$

の解 $u(r)$, $0 < r < 1$, で次の条件を満たすものを求める:

$$(1.2) \quad \frac{du}{dr} = \begin{cases} O(r) & (0 < r < z) \\ O(1) & (z \leq r) \end{cases}, \quad r \searrow 0;$$

$$(1.3) \quad u(1) = 0.$$

問題 II. 方程式 (1.1) の解 $u(r)$, $0 < r < 1$, で条件 (1.2) 及び

$$(1.4) \quad \int_0^1 e^{u(r)} r^{n-1} dr = \frac{1}{\lambda}$$

を満たすものを求める.

ただし $n > 0$, λ は実数のパラメータとする. 我々の目的は, 問題 I, 問題 II の解の個数および性質を調べることである. 主な結果を述べると

1) 解の個数 問題 I [問題 II] の解の個数 $k_I(\lambda, n)$ [$k_{II}(\lambda, n)$] は次の表のように変化する.

表 1. i) $0 < m < 2$

	$\lambda \leq 0$	$0 < \lambda < \lambda_1$	$\lambda = \lambda_1$	$\lambda_1 < \lambda$
k_I	1	2	1	0

	$-\infty < \lambda < +\infty$
k_{II}	1

ここに λ_1 は m に依存する正の定数.

ii) $m = 2$

	$\lambda \leq 0$	$0 < \lambda < 2$	$\lambda = 2$	$2 < \lambda$
k_I	1	2	1	0

	$\lambda < 8$	$8 \leq \lambda$
k_{II}	1	0

iii) $2 < m < 10$

	$\lambda < \lambda_2$	$\lambda = \lambda_2$	$\lambda_2 < \lambda < \lambda_4$	}	$\lambda = \lambda_{2k}$	$\lambda_{2k} < \lambda < \lambda_{2k+2}$	$\lambda = \lambda_{2k+2}$	}
k	1	2	3		$2k$	$2k+1$	$2k+2$	

}	$\lambda = \lambda_\infty$	}	$\lambda = \lambda_{2k-1}$	$\lambda_{2k-1} < \lambda < \lambda_{2k+1}$	$\lambda = \lambda_{2k+1}$	}	$\lambda = \lambda_2$	$\lambda_2 < \lambda$
	∞		$2k-1$	$2k$	$2k+1$		1	0

ここに $k = k_I [k_{II}]$ にて $\lambda_j = \lambda_{I,j}$ [$\lambda_{II,j}$] は正の定数列であつて, $\lambda_{2k} \nearrow \lambda_\infty$ ($k \nearrow \infty$), $\lambda_{2k-1} \searrow \lambda_\infty$ ($k \nearrow \infty$), 且し $\lambda_{I,\infty} = 2(m-2)$ [$\lambda_{II,\infty} = 2m$].

iv) $10 \leq m$

	$\lambda < 2(m-2)$	$2(m-2) \leq \lambda$
k_I	1	0

	$\lambda < 2m$	$2m \leq \lambda$
k_{II}	1	0

方程式 (1.1) は非線型橋田型方程式

$$(1.5) \quad \Delta u + \lambda e^u = 0$$

の回転対称解の方程式である。 $m=2$ のときは、1850年12 J. Liouville が2つの任意函数を含む一般解を発見したことによって Liouville の方程式と呼ばれることがある。 I. M. Gelfand は [2] で、 $m=1, 2, 3$, $\lambda > 0$ のときの問題 I の解の個数を調べ、 $m=3$, $\lambda=2$ で $k_I = \infty$ となることを示した。この結果をその後 D. D. Joseph & T. S. Lundgren が $m > 2$, $\lambda > 0$ のばあいに拡張し、 i) $k_I = 0$ for $\lambda > \lambda^*$; $\lambda^* = 2(m-2)$ for $m \geq 10$; ii) $k_I = 1$ for $0 < \lambda < 2(m-2)$, $m \geq 10$; iii) $k_I = 1$ for $\lambda = \lambda^*$, $m < 10$; iv) $k_I = \infty$ for $\lambda = 2(m-2)$, $m < 10$; v) $k_I \ll \infty$ for $0 \neq |\lambda - 2(m-2)| \ll 1$, $m < 10$, を得ている ([5], Theorem 2)。表 1 はこの結果を $m > 0$, $-\infty < \lambda < +\infty$ に拡張して精しくしたものである。

我々は次の方針で行う。

まず、問題を2階有理的常微分方程式

$$(1.6) \quad \frac{d^2 b}{dz^2} = \frac{1}{b} \left(\frac{db}{dz} \right)^2 - \frac{m}{2z^2} \left(\frac{db}{dz} + b^2 \right)$$

の $b(0) = 1$ を満たす解 $b(z; m)$ の性質を調べることに帰着させる。 $b(z; m)$ 及び $a(z; m) = -d \log b(z; m) / dz$ は実軸のある区間 $(-\rho(m), +\infty)$ の上で解析的となり逆函数を持つことがわかる。さらに、関係式

$$(1.7)_{\text{I}} \quad e^A b(\lambda_{\text{I}}(A; n) e^{A/2n}; n) = 1$$

$$[(1.7)_{\text{II}} \quad e^A a(\lambda_{\text{II}}(A; n) e^{A/2n}; n) = 1]$$

によつて, $-\infty < A < +\infty$ の函数 $\lambda_{\text{I}}(A; n)$, $[\lambda_{\text{II}}(A; n)]$ が定義される。このとき,

2) 解の公式. 問題 I [問題 II] は, A に関する方程式

$$(1.8)_{\text{I}[\text{II}]} \quad \lambda = \lambda_{\text{I}}(A; n) \quad [\lambda = \lambda_{\text{II}}(A; n)]$$

が解 $A = A_j$, $j=1, \dots, k_{\text{I}} [k_{\text{II}}]$ を持つとき, ちよつと解

$$(1.9)_{\text{I}, [\text{II}]} \quad u(r) = A_j + \log b(\lambda e^{A_j} r^{2/2n}; n), \quad j=1, \dots, k_{\text{I}} [k_{\text{II}}]$$

を持つ。

したがつて (A, λ) - 平面に描かれた函数 $\lambda_{\text{I}}(A; n)$ [$\lambda_{\text{II}}(A; n)$] のグラフが問題 I [問題 II] の分岐ダイアグラムを与える。ところが, $\lambda_{\text{I}}(A; n)$ [$\lambda_{\text{II}}(A; n)$] じしんがある 2 次元自律系を満たすため, その大域的挙動が徹密に調べられる。たとえば,

3) $\lambda_{\text{I}}(A; n)$ [$\lambda_{\text{II}}(A; n)$] の増減は次の表のようになる。

表 2. i) $0 < n < 2$

A	$-\infty$	0	A_1	$+\infty$	A	$-\infty$	0	$+\infty$	
λ_{I}	$-\infty$	\nearrow	λ_1	\searrow	0	λ_{II}	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$

$$\text{ii) } n=2 \quad \lambda_{\text{I}}(A; 2) = 8(e^{-A/2} - e^{-A}),$$

$$\lambda_{\text{II}}(A; 2) = 8(1 - e^{-A}).$$

$$\text{iii) } 2 < n < 10$$

図 1. 問題 I の分岐ダイアグラム

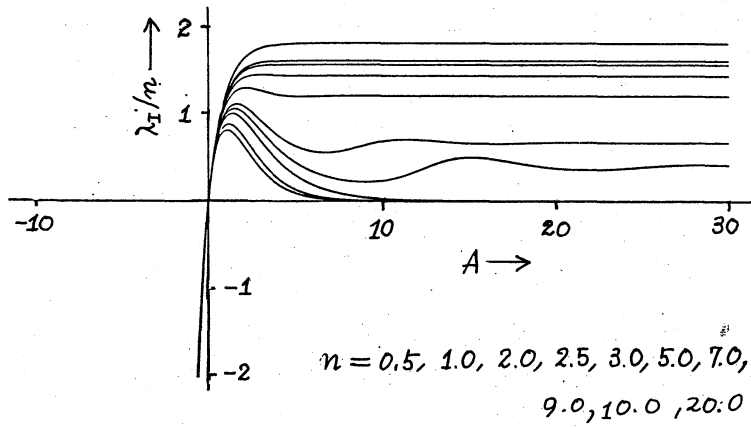
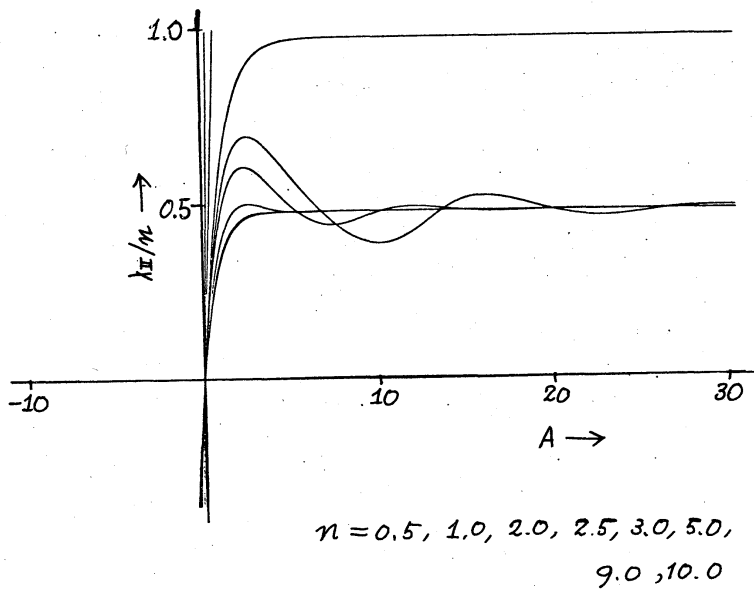


図 2. 問題 II の分岐ダイアグラム



田端・朴両氏の数値計算による。

A	$-\infty$	0	A_j	}}	A_{2k-1}	A_{2k}	A_{2k+1}	}}	$+\infty$
λ	$-\infty$	\rightarrow	λ_j	}}	λ_{2k-1}	λ_{2k}	λ_{2k+1}	}}	λ_∞

ここに $\lambda = \lambda_I(A; m) [\lambda_{II}(A; n)]$ に在いて, $A_j = A_{I,j} [A_{II,j}]$ は正の単調増大列. λ_j は表1に同じ.

iv) $10 \leq n$

A	$-\infty$	0	$+\infty$
λ_I	$-\infty$	\rightarrow	$2(n-2)$

A	$-\infty$	0	$+\infty$
λ_{II}	$-\infty$	\rightarrow	$2n$

注. いづれのはあいま $\lambda_I(0; n) = \lambda_{II}(0; n) = 0$.

さらに $b(z; n)$ の函数論的な特徴は方程式 (1.6) を局所的に簡単な方程式に還元する方法 (木村, [7], 第4章, 及び M. Iwano [4]) によって詳しく調べることができる. その結論は §4 に述べるが, 特に次のことに注意したい.

4) $\Re \nu = -\rho = -\rho(n)$ のとき

$$(1.10) \quad b(z; n) = \frac{4\rho}{n} (z+\rho)^{-2} + \frac{2(n-2)}{n} (z+\rho)^{-1} + \frac{2(n-2)(n-1)}{3n\rho} \log(z+\rho) + \text{const.} + O(|z+\rho| |\log(z+\rho)|)$$

という評価が成立する. 従って, 動く特異点 $z = -\rho$ は, $n \neq 1$, $n \neq 2$ のとき, 極でも代数的分岐点でもない. E. Hille のいう "pseudo-pole" ([4]) である. (注. $n=1, 2$ のときは $b(z; 1) = \text{sech}^2 \sqrt{z}$, $b(z; 2) = (1+z/2)^{-2}$ となり, $z = -\rho(1) = -\pi^2/4$, $-\rho(n) = -2$ は極である)

以上が我々の主な結果である.

ところで, 方程式 (1.1) (あるいは (1.5)) は広い応用範囲

を持つ重要な方程式である。とくに天体物理学では重力平衡にある等温ガス球を記述する方程式として現われる(

S. Chandrasekhar, [1], Chapter IV 参照)。例えば, $K > 0$, $R > 0$, $\rho_1 > 0$ が与えられたとき,

$$(1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{重力平衡の方程式: } \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho, \\ \text{状態方程式: } P = K \rho \end{array} \right.$$

を満たし, かつ半径 $r = R$ の点で密度 $\rho = \rho_1$ となる等温ガス球の密度分布は, $n=3$, $\lambda = 4\pi G R^2 \rho_1 / K$ にたいする問題 I の解 $u(r)$ を用いて

$$(1.12) \quad \rho = \rho_1 e^{u(r/R)} \quad (0 < r < R)$$

と与えられる; また, $K > 0$, $R > 0$, $M > 0$ が与えられたとき, (1.11) を満たし, かつ半径 R の球内の総質量が M に等しい密度分布は, $n=3$, $\lambda = 3GM / KR$ にたいする問題 II の解 $u(r)$ を用いて

$$(1.13) \quad \rho = (3M / 4\pi R^3) e^{u(r/R)}$$

と与えられる。以上の例は $\lambda > 0$ に関するものだが, $\lambda < 0$ のばあいも次のように応用される。いま

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(t, \mathbf{x}, \xi) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/2} e^A b(-\alpha \beta e^A |\mathbf{x}|^2 / 2m; m) \\ \phi(t, \mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\alpha} (A + \log b(-\alpha \beta e^A |\mathbf{x}|^2 / 2m; m)) \end{array} \right.$$

とおくと, (1.14) は Vlasov 方程式

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \nabla_x f + \alpha \nabla_x \phi \nabla_\xi f = 0 \\ \Delta_x \phi = \beta \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, \xi) d\xi \end{cases}$$

の回転対称定常解を与えている。 $\alpha\beta > 0$ のばあい (例えば, electron plasma のばあい $\alpha = -\varepsilon/m$, $\beta = -4\pi\varepsilon < 0$) は, 解(1.14) は $|x| < \sqrt{2m\rho(m)e^{-A}/\alpha\beta}$ で存在し, $|x| \nearrow \sqrt{2m\rho(m)e^{-A}/\alpha\beta}$ のとき発散する。一方 $\alpha\beta < 0$ のばあいは解(1.14)は $|x| < \infty$ に存在し,

$$\begin{cases} f(t, x, \xi) = (2\pi)^{-n/2} \frac{2(n-2)}{|\alpha\beta|} e^{-|\xi|^2} |x|^{-2} (1 + O(|x|^{-\frac{n-2}{2}})) \\ |\nabla_x \phi(t, x, \xi)| = \frac{2}{|\alpha|} |x|^{-1} (1 + O(|x|^{-\frac{n-2}{2}})) \end{cases}$$

という挙動を $|x| \rightarrow \infty$ のときに示す。ただし, これは $n > 2$ のばあい (詳しくは §4 参照) であり, $n = 2$ のときは

$$f(t, x, \xi) = (2\pi)^{-1} e^{-|\xi|^2/2} e^A (1 + \alpha\beta e^A |x|^2/8)^{-2}$$

$n = 1$ のときは

$$f(t, x, \xi) = (2\pi)^{-1/2} e^{-|\xi|^2/2} e^A \operatorname{sech}^2 \sqrt{\alpha\beta e^A} |x|^{1/2}$$

である。

岩野正宏氏, 木村俊房氏にはいろいろご教示をいただきました。また, 田端正久氏, 井恵子氏には数値計算をしていただきました。以上の方々の御好意に感謝いたします。

§2. 函数 $a(z; n)$, $b(z; n)$ の定義と性質

変数変換

$$(2.1) \quad z = \lambda r^2/2m, \quad b = e^u, \quad a = -\frac{d}{dz} \log b$$

によって方程式 (1.1) は 1 階連立方程式

$$(2.2) \quad \frac{z}{n} z \frac{da}{dz} = b - a, \quad z \frac{db}{dz} = -ab,$$

あるいは b に関する単独 2 階有理的常微分方程式 (1.6) に帰着する。この節では (2.2) の原点で正則な解の性質を調べる。

定理 1. 連立方程式 (2.2) は

$$(2.3) \quad a(0) = 1, \quad b(0) = 1$$

を満たす $z = 0$ で正則な解を一意に持つ。この解は $z = 0$ を中心とする巾級数

$$(2.4) \quad \begin{cases} a(z) = 1 + \frac{n}{n+2}(-z) + \sum_{j=2}^{\infty} a_j(n)(-z)^j, & a_j(n) > 0 \\ b(z) = 1 + (-z) + \sum_{j=2}^{\infty} b_j(n)(-z)^j, & b_j(n) > 0 \end{cases}$$

に展開され、その収束半径 $\rho(n)$ は次の不等式を満たす。

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{n}{n+2} \leq \rho(n) \leq 2 & (2 \leq n) \\ 2 \leq \rho(n) \leq \frac{n}{n+2} & (0 < n < 2) \end{cases}$$

証明. 形式巾級数 $a = 1 + \sum a_j (-z)^j$, $b = 1 + \sum b_j (-z)^j$ を方程式 (2.2) に代入すると、次の漸化式によって形式解が求まる:

$$a_{j+1} = \frac{n+j}{n+2j+2} \cdot \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j a_i a_{j-i}, \quad b_j = \frac{n+2j}{n} a_j, \quad j=0, 1, \dots$$

このとき帰納法により

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^j \leq a_j \leq \left(\frac{n}{n+2}\right)^j & (2 \leq n) \\ \left(\frac{n}{n+2}\right)^j \leq a_j \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j & (0 < n < 2) \end{cases}$$

が証明される。ゆえに形式解は (2.5) を満たす正の収束半径を

持ち, $|z| < \rho(m)$ で収束して真の解を与える. \square

定義 1. 定理 1 で定まる解を実軸上可能な限り延長したものを $a(z; n)$, $b(z; n)$ とする.

注. $n = 1, 2$ のときは

$$(2.6) \quad \begin{cases} a(z; 1) = z^{-1/2} \tanh z^{1/2} \\ b(z; 1) = \operatorname{sech}^2 z^{1/2} \end{cases} \quad \begin{cases} a(z; 2) = (1 + z/2)^{-1} \\ b(z; 2) = (1 + z/2)^{-2}. \end{cases}$$

変数変換

$$(2.7) \quad \alpha = za, \quad \beta = zb$$

により方程式 (2.2) は Briot-Bouquet 型の方程式

$$(2.8) \quad z \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{n-2}{2} \alpha + \frac{n}{2} \beta, \quad z \frac{d\beta}{dz} = (1-\alpha)\beta$$

に帰着する. このとき独立変数を $t = \log(\pm z)$ に変えれば,

$$(2.8)' \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{n-2}{2} \alpha + \frac{n}{2} \beta, \quad \frac{d\beta}{dt} = (1-\alpha)\beta$$

という 2 次元自律系になる. $n \neq 2$ ならば, 自律系 (2.8)' の特異点は

$$(2.9) \quad O_1: (\alpha, \beta) = (0, 0). \text{ 及び } O_2: (\alpha, \beta) = \left(1, \frac{n-2}{n}\right)$$

のふたつである. $a(z; n)$, $b(z; n)$ に対応する (2.8) の解を

$$(2.10) \quad \alpha(z; n) = za(z; n), \quad \beta(z; n) = zb(z; n)$$

と記そう. この解の軌道は, 関係式

$$(2.11) \quad \beta = S(\alpha), \quad \text{ただし } S(\alpha) = \alpha - \frac{2}{n+2} \alpha^2 + \sum_{j=3}^{\infty} s_j(n) \alpha^j$$

で定まる安定多様体であることに注意しておく.

そこで (2.10)' に 2 次元自律系の幾何学的理論を適用して,

$a(z; m)$, $b(z; n)$ の特徴づけを行ない, その大域的挙動を調べることによろう.

定理 2. $u(r)$, $0 < r < \delta$, が方程式 (1.1) を満たすと仮定する. このとき, $u(r)$ がさらに条件 (1.2) を満たすためには, $u(r)$ が $0 \leq r < \delta$ で連続かつ

$$(2.12) \quad u(r) = A + \log b(\lambda e^A r^{2/2m}; m), \quad A = u(0)$$

となることが必要充分条件である.

証明. $u(r)$ が方程式 (1.1) の解であり条件 (1.2) を満たすとする. 変換 (2.1), (2.7) により対応する (2.8) の解

$$(\alpha(z), \beta(z)) = \left(-\frac{\lambda}{4n} r \frac{du}{dr}, e^{u(r)} \right)_{r=(2mz/\lambda)^{1/2}}$$

を考える. 条件 (1.2) からこの解 $(\alpha(z), \beta(z))$ は $z \rightarrow 0$ のとき特異点 O_1 に収束する. 方程式 (2.8) を

$$(2.13) \quad z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n-2}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 y_2 + y_2^2 \\ -y_1 y_2 - y_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

と変換すれば, O_1 が $0 < m < 2$ のとき結節点, $2 < m$ のとき鞍点であることがわかる. そこで, i) $2 < m$ のときは, 鞍点 O_1 に収束する解はすべて安定多様体 (2.12) に載るのだから, $\beta(z) = \beta(cz; m)$, $c = \text{定数}$, となり, (2.12) が成立つ. ii) $0 < m < 2$ のときは, 結節点 O_1 の近傍で方程式を線型化することができる (§5 を参照). 従って $(\alpha(z), \beta(z))$ に対して次の表現が成立つ:

$$\begin{cases} \alpha(z) = C_1 z^{\frac{2-n}{2}} - C_2 z + P_1(C_1 z^{\frac{2-n}{2}}, C_2 z) \\ \beta(z) = C_2 z + P_2(C_1 z^{\frac{2-n}{2}}, C_2 z). \end{cases}$$

ここに C_1, C_2 は定数であり, P_1, P_2 は収束する 2 重巾級数である. もし $C_1 \neq 0$ ならば, $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{2次からはじまる}}$

$$\frac{dy}{dz} \sim \text{const. } z^{1-n}, \text{ const. } \neq 0,$$

となる (1.2) に反する. ゆえに $C_1 = 0$, $\beta(z) = C_2 z + P_2(0, C_2 z) = \beta(C_2 z; n)$ となり, (2.12) が成立つ. iii) $n = 2$ のときは安定多様体 (2.12) は $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha$ であり, それ以外の軌道は O_1 を通らない放物線 $\beta = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha + c$, $c \neq 0$, に含まれる. 従って, O_1 に収束するために, (2.12) が成立つ.

逆は明らかである. \square

定理 3. $a(z; n), b(z; n)$ は $-p(n) < z < +\infty$ で定義され, 単調減少かつ

$$(2.14) \quad \begin{cases} a(z; n) \nearrow +\infty, & b(z; n) \nearrow +\infty & (z \searrow -p(n)) \\ a(z; n) \searrow 0, & b(z; n) \searrow 0 & (z \nearrow +\infty). \end{cases}$$

また対応する (2.8) の解 $\alpha(z; n), \beta(z; n)$ は次の挙動を示す:

i) $0 < n < 2$ のとき

$$(2.15) \quad \alpha(z; n) \nearrow +\infty, \quad \beta(z; n) \rightarrow 0 \quad (0 < z \nearrow +\infty);$$

ii) $2 < n$ のとき

$$(2.16) \quad (\alpha(z; n), \beta(z; n)) \rightarrow (1, \frac{n-2}{n}) \quad (z \nearrow +\infty),$$

とくに $10 \leq n$ のときは

$$(2.17) \quad \alpha(z; m) \nearrow 1 \quad (-p(m) < z \nearrow +\infty);$$

iii) $0 < m < +\infty$ にたいして,

$$(2.18) \quad \alpha(z; m) \searrow -\infty, \quad \frac{\beta(z; m)}{\alpha(z; m)^2} \rightarrow -\frac{1}{m} \quad (0 > z \searrow -p(m)).$$

証明. 以下 $\alpha(z; m)$, $b(z; m)$, $a(z; m)$, $\beta(z; m)$, $p(m)$ を $\alpha(z)$, $b(z)$, $a(z)$, $\beta(z)$, p と略す. 解 $(\alpha(z), \beta(z))$ の極大延長区間を $(-p, z^+)$ とする.

$-p < z < 0$ で $\alpha(z)$, $b(z)$ が単調減少であること, $z \searrow -p$ で発散することは, $a_j(m) > 0$, $b_j(m) > 0$ (定理1) から明らかである. 一方, $0 < z < z^+$ において不等式

$$(2.19) \quad 0 < \beta(z) < \alpha(z) \quad (0 < z < z^+)$$

が成立することを示そう. (2.4) と (2.11) から不等式 (2.19) は充分小さな $z > 0$ に対して成立する. $\beta \equiv 0$ は (2.8)' の軌道であるから, 解の一意性により $z > 0$ において $\beta(z) = 0$ となることはない. ゆえに $\beta(z) > 0$. またもし $\alpha(z) > \beta(z)$ が成立つ z に最大値 $z_1 < z^+$ があつたと仮定すると, $\frac{d}{dz}(\alpha - \beta)|_{z=z_1} = z_1 \beta(z_1) > 0$ となつて矛盾である. ゆえに (2.19) が成立つ. 不等式 (2.19) により, $\frac{da}{dz} = \frac{a}{z}(\beta - \alpha)$, $\frac{db}{dz} = -\frac{\alpha\beta}{z^2}$ に注意すれば, $\alpha(z)$, $b(z)$ が $z > 0$ において単調減少であることがわかる.

次に, (2.15), (2.16) とあわせて, $z^+ = +\infty$, $\alpha(+\infty) = b(+\infty) = 0$ を示すことにする.

i) $0 < m < 2$ のばあい. $z > 0$ において $(\alpha(z), \beta(z))$ が次

の不等式を満たすことがわかる:

$$(2.20) \quad 0 < \beta < \begin{cases} \alpha & (\alpha \leq 1) \\ \alpha e^{-\alpha+1} & (1 \leq \alpha) \end{cases}$$

これから $\frac{d\alpha}{dz} > 0$ となり, $\alpha(z)$ は単調増大である. もし, $\alpha(z) \nearrow \bar{\alpha} < +\infty$ ならば, 解は $z \nearrow z^+$ のとき, 特異点をひとつも含まぬコンパクト領域: $\frac{1}{2}\bar{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$, $0 \leq \beta \leq 1$ に留まることになるが, これは Poincaré の定理 ([8], p. 211, (9.3) 及び p. 190, (11.2)) から矛盾である. ゆえに $\alpha(z) \nearrow +\infty$. これと不等式 (2.20) から $\beta(z) \rightarrow 0$. さらに方程式から

$$\frac{z}{\alpha} \frac{d\alpha}{dz} = \frac{z-n}{2} + \frac{n}{2} \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 - \frac{n}{4} \quad (\exists z_1 < z < z^+)$$

となるから, $\alpha(z) \leq \text{const. } z^{4-n}$ が得られる. この評価と $\alpha(z)$ が発散することから, $z^+ = +\infty$, $\alpha(z) \leq \text{const. } z^{-4} \rightarrow 0$ ($z \nearrow +\infty$), $b(z) = \beta(z) z^{-1} \rightarrow 0$ が成立つ.

ii) $2 < n$ のばあいは, $(\alpha(z), \beta(z))$ が特異点 O_2 に収束することを確かめればよい. これは, Joseph & Lundgren ([5]) によって証明されているが, 念のためここでも証明しておく. 自律系 (2.8)' を

$$(2.21) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n-2}{2} & \frac{n}{2} \\ -\frac{n-2}{n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta - \frac{n-2}{n} \end{pmatrix}$$

と変換すれば, (2.21) の線型部分の固有値は

$$(2.22) \quad \sigma_{\pm} = \frac{1}{4} \left(-(n-2) \pm \sqrt{(n-2)(n-10)} \right)$$

である. 従って特異点 O_2 は $2 < n < 10$ のとき (2.8)' の安定渦状点, $10 \leq n$ のとき安定結節点である. 一方, 解 $(\alpha(z), \beta(z))$ は

次の不等式を満たすことがわかる:

$$(2.23) \quad \beta < -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha.$$

不等式 (2.19) と (2.23) から, 解は $z \nearrow z^+$ のとき特異点 O_1 と O_2 を含むあるコンパクト領域に留まる. 極限集合は O_1 を含まないから, O_2 を含むか, あるいは閉軌道である ([8], p.221,

(9.2)). ところが (2.8)' を半平面 $\beta > 0$ で

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \alpha \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n-2}{2}\alpha + \frac{n}{2}e^u \\ 1-\alpha \end{pmatrix}, \quad u = \log \beta$$

と変換すると,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{n-2}{2}\alpha + \frac{n}{2}e^u \right) + \frac{\partial}{\partial u} (1-\alpha) = -\frac{n-2}{2}$$

が定符号となる. ゆえに Bendixson の判定条件 ([8], p.227, (45.1)) により, $\beta > 0$ には閉軌道はない. ゆえに $(\alpha(z), \beta(z))$ の終集合は O_2 1点からなり, $z^+ = +\infty$ で O_2 に収束する.

次に (2.17) を証明する. (2.8) は 2階非線型常微分方程式

$$(2.24) \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{n-2}{2} - w \right) \frac{d}{dx} \right] w + \frac{n-2}{2} w(1-w) = 0, \quad \alpha = 1-w, \quad z = e^{-x}$$

に変換されるが, とくに $10 \leq n$ のときは, [6], Theorem 1.2 の条件が成立することが確かめられ,

$$(2.25) \quad w(0) = \frac{1}{2}, \quad 0 < w(x) < 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

を満たす解が一意的に存在する. これに対応する (2.8) の解

$$\begin{pmatrix} \alpha(z) \\ \beta(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-w \\ \frac{z}{n} \left[\frac{dw}{dx} + \frac{n-2}{2}(1-w) \right] \end{pmatrix}_{x = -\log z}$$

は, [6], (1.75) より $\varepsilon \searrow 0$ ($x \nearrow +\infty$) で O_1 に収束する. ゆえにその軌道は安定多様体 (2.11) に他ならない. 従って $\alpha(\varepsilon; n) = 1 - w(-\log C\varepsilon)$ とする定数 C が存在し, (2.17) が (2.25) から得られる.

iii) 最後に $\varepsilon \searrow -\rho$ のときの挙動 (2.19) を証明するため, 少し複雑だが, (2.10) を次のように変換する:

$$(2.26) \quad \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \left(\frac{n-2}{2} y_1 - \frac{n}{2} y_2 \right) \\ -y_2 (-1 + (n-1) y_2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} \\ \frac{\beta}{\alpha^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{ds} = -\frac{\varepsilon}{\alpha} \frac{d}{d\varepsilon}$$

このとき,

$$s = \varphi(\varepsilon) = - \int_0^\varepsilon \frac{\alpha(s) ds}{s},$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha(\varepsilon)} \\ \frac{\beta(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)^2} \end{pmatrix}_{\varepsilon = \varphi^{-1}(s)} \quad (0 < s < s^+ = \varphi(-\rho))$$

は自律系 (2.26) の極大延長解である. 自律系 (2.26) の特異点は,

$$Q_1: (y_1, y_2) = (0, 0), \quad Q_2: (y_1, y_2) = (0, -\frac{1}{n}), \quad O_2: (y_1, y_2) = (1, \frac{n-2}{n})$$

の3つである. (2.18) は, $(y_1(s), y_2(s))$ が $s \nearrow s^+$ のとき Q_2 に収束するという主張である. (2.14) により既に

$$(2.27) \quad \begin{cases} y_1(s) < 0, \quad y_2(s) < 0; \quad y_1(s) \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow s^+); \\ y_1(s) = -\frac{1}{s} (1 + O(s)), \quad y_2(s) = -\frac{1}{s} (1 + O(s)) \quad (s \rightarrow 0) \end{cases}$$

がわかっている.

まず, $y_2(s)$ が $s \nearrow s^+$ のとき有界であることを示そう. $\alpha <$

$n \leq 1$ のばあいには, (2.27) から $k > \frac{1}{n}$ を充分大きくとると,
 $y_2(s_1) > -k$ となる $s_1 > 0$ が存在する. $y_2(s) > -k$ となる s の最
 大値 $s_2 < s^+$ である. たとすると, $\frac{d}{ds}(y_2 + k)|_{s=s_2} =$
 $= k(-1 - (1-n)y_1(s_2) + nk) > 0$ となつて矛盾するから, $s > s_1$
 において $-k < y_2(s) < 0$ が従ふ. 一方 $1 < n$ のばあいには, 不
 等式

$$-1 + (n-1)y_1(s) - ny_2(s) > 0 \quad (0 < s < s^+)$$

が成立する. なぜならば, (2.27) によりこの不等式は充分小
 さな s に対して成立し, またこの不等式が成立する s の最大値
 $s_1 < s^+$ がある. たとすると, $\frac{d}{ds}(-1 + (n-1)y_1 - ny_2)|_{s=s_2} =$
 $= \frac{y_1(s_2)}{2}(-1 + y_1(s_2)) > 0$ となつて矛盾だからである. (2.27) と
 この不等式から $y_2'(s) > 0$ となり, このばあいにも $y_2(s)$ は $s \nearrow s^+$
 のとき有界である.

(2.27) と $y_1(s)$ が有界に留まることから, 極限集合は負
 の y_1 -軸の有界な部分に含まれる. ゆえに Poincaré-Bendixson
 の定理 ([8], p. 219, (8.1)) により, $(y_1(s), y_2(s))$ は Q_1 か Q_2 のどち
 らか一方に収束する. もし解が Q_1 に収束したとすると, 充分大
 きな s に対して, $y_2'(s) = -y_2(s)(-1 + (n-1)y_1(s) - ny_2(s)) < (1-\delta)y_2(s)$
 (< 0) となつて矛盾である. ゆえに解 $(y_1(s), y_2(s))$ は Q_2 に収束
 する. \square

§3. 問題I, 問題IIの解の公式と分岐ダイアグラム

定理3により函数 $z \rightarrow a(z; m)$ [$z \rightarrow b(z; m)$] は半直線 $(-\rho(m), +\infty)$ を実数全体の上に 1:1 解析的に変換する。ゆえにその逆函数 $a^{-1}(\cdot; m)$ [$b^{-1}(\cdot; m)$] を用いて次の定義が可能になった。

定義2. $-\infty < A < +\infty$ の実解析函数 $\lambda_I(A; m)$, $\lambda_{II}(A; m)$ を

$$(3.1)_I \quad \lambda_I(A; m) = 2m e^{-A} b^{-1}(e^{-A}; m)$$

$$(3.)_{II} \quad \lambda_{II}(A; m) = 2m e^{-A} a^{-1}(e^{-A}; m)$$

と定義する。

いま $u(r)$ が問題Iの解であるとする。このとき条件(1.2)から定理2により

$$(2.12) \quad u(r) = A + \log b(\lambda e^A r^2/2m; m), \quad u(0) = A$$

が成立する。従って条件(1.3)は

$$0 = A + \log b(\lambda e^A/2m; m)$$

となる。これは $\lambda_I(A; m)$ の定義 (3.1)_I から条件

$$(1.8)_I \quad \lambda = \lambda_I(A; m)$$

に他ならない。逆に, (1.8)_I を満たす A について (2.12) で定義される $u(r)$ は問題Iの解を与える。

$u(r)$ が問題IIの解であるとする。このとき条件(1.2)から定理2によってやはり (2.12) が成立する。条件(1.4)は方程式

(1.1)を利用して変形すると

$$\frac{A}{n} = \int_0^1 \lambda e^{u(r)} r^{n-1} dr = - \int_0^1 \frac{d}{dr} r^{n-1} \frac{du}{dr} dr = - \frac{du}{dr} \Big|_{r=1} + \lim_{r \rightarrow 0} r^{n-1} \frac{du}{dr}$$

$$= - \frac{du}{dr} \Big|_{r=1} = \frac{\lambda e^A}{n} a(\lambda e^A/2m; n)$$

となる。これは $\lambda_{II}(A; n)$ の定義 (3.4)_{II} から条件

$$(1.8)_{II} \quad \lambda = \lambda_{II}(A; n)$$

に他ならない。逆に (1.8)_{II} を満たす A に対して (2.12) は問題 II の解を与える。

ゆえに

定理 4. $u(r)$ が問題 I [問題 II] の解となるためには,

$$(2.12) \quad u(r) = A + \log b(\lambda e^A r^2/2m; n), \quad u(0) = A$$

かつ

$$(1.8)_{I[II]} \quad \lambda = \lambda_I(A; n) \quad [\lambda = \lambda_{II}(A; n)]$$

となることが必要充分である。

定理 4 により問題 I [問題 II] の解の個数は方程式 (1.8)_{I[II]} の解の個数に帰着した。函数 $\lambda_I(A; n)$ [$\lambda_{II}(A; n)$] の大域的挙動を調べて分岐ダイアグラムを完成しよう。以下混同のおそれがないときは函数記号の中のパラメータ n は略す。

いま

$$(3.2) \quad z_I(A) = b^{-1}(e^{-A}). \quad [z_{II}(A) = a^{-1}(e^{-A})]$$

とおくと, 定理 3 から $z = z_I(A)$ [$z_{II}(A)$] の増減は次の表のようになる:

A	$-\infty$		0		$+\infty$
z	$-p$	\nearrow	0	\nearrow	$+\infty$

さらに

$$(3.3) \quad \lambda_I(A) = 2m\beta(z_I(A)), \quad [\lambda_{II}(A) = 2m\alpha(z_{II}(A))]$$

が成立つことに注意して

$$(3.4) \quad \mu_I(A) = \frac{1}{\alpha(z_I(A))} \quad \left[\mu_{II}(A) = \frac{2}{n} \frac{\alpha(z_{II}(A))}{\beta(z_{II}(A)) - \alpha(z_{II}(A))} \right]$$

とおくと、方程式 (2.8) から $(\lambda_I(A), \mu_I(A))$ $[(\lambda_{II}(A), \mu_{II}(A))]$ が満たす次の自律系が導かれる：

$$(3.5)_I \quad \frac{d\lambda_I}{dA} = (\mu_I - 1)\lambda_I, \quad \frac{d\mu_I}{dA} = -\frac{1}{4} \mu_I^2 (\lambda_I \mu_I - 2(m-2));$$

$$(3.5)_{II} \quad \frac{d\lambda_{II}}{dA} = (\mu_{II} - 1)\lambda_{II}, \quad \frac{d\mu_{II}}{dA} = \frac{1}{4} \mu_{II}^2 \left(\mu_{II} - \frac{2}{n}\right) (\lambda_{II} \mu_{II} - 2n).$$

これを利用して

定理5. $\lambda_I(A; n)$ $[\lambda_{II}(A; n)]$ の増減は表2のようになる。(p. 4~5参照)

証明. まず $A < 0$ においては、 $\lambda_I(A) < 0$, $\mu_I(A) < 0$, $\lambda_{II}(A) < 0$, $\mu_{II}(A) < 0$. (3.3), (3.4) により $\alpha(z)$, $\beta(z)$ の挙動に帰着させれば明らかである. ゆえに $A < 0$ のとき $\lambda_I(A)$, $\lambda_{II}(A)$ はともに負かつ単調減少である. したがって、 $A > 0$ のときを考えよう. i) $0 < m < 2$ のばあい. まず $\lambda_I(A) > 0$, $\mu_I(A) > 0$ から $\frac{d\mu_I}{dA} = -\frac{1}{4} \mu_I^2 (\lambda_I \mu_I + 2(2-n)) > 0$ となり、 $\mu_I(A)$ は単調減少である. ゆえに方程式 $\mu_I(A) - 1 = 0$ はただ1つの解 $A = A_1$ を持つ ($A_1 = z_I^{-1} \alpha^{-1}(1)$). ゆえに $A < A_1$ のとき $\lambda_I(A)$ は単調増大,

$A_1 < A$ のとき単調減少で、 $\lambda_1 = \lambda_I(A_1)$ が最大値となる。一方、 $\lambda_{II}(A) = 2n\alpha(z_{II}(A))$ は $\alpha(z)$ と同様に単調増大である (定理 3. i))

ii) $2 < n < 10$ のばあい。 $\mu_I(A)$ は A の解析関数であり、 $\mu_I(A) - 1 = \frac{1}{A}(1 + O(A))$ ($A \rightarrow 0$) かつ $(\lambda_I(A), \mu_I(A))$ は $(3, 5)_I$ の安定渦

状点 $(\lambda_I, \mu_I) = (2(n-2), 1)$ にまき

つく。ゆえに A に関する方程

式 $\mu(A) - 1 = 0$ は可算無限個

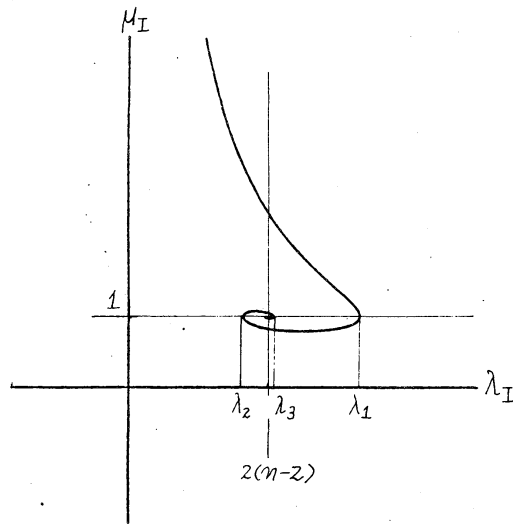
の解を持つ。これを小さい順

に $A_j, j=1, 2, \dots, A_j < A_{j+1}$,

とし、 $\lambda_j = \lambda_I(A_j)$ とおく。こ

のとき、解の一意性から $\lambda_j \neq$

$2(n-2)$ である。したがって、



$\left(\frac{d\mu}{dA}\right)_{A=A_j} = -\frac{1}{4}(\lambda_j - 2(n-2)) \neq 0$ であるから、

$$\left\{ \begin{array}{l} A < A_1 \text{ か } A_{2k} < A < A_{2k+1} \text{ ならば } \mu_I(A) - 1 > 0, \frac{d\lambda_I}{dA} > 0; \\ A_{2k-1} < A < A_{2k} \text{ ならば } \mu_I(A) - 1 < 0, \frac{d\lambda_I}{dA} < 0; \\ \left(\frac{d\mu}{dA}\right)_{A=A_{2k-1}} < 0, \lambda_{2k-1} - 2(n-2) > 0; \\ \left(\frac{d\mu}{dA}\right)_{A=A_{2k}} > 0, \lambda_{2k} - 2(n-2) < 0 \quad (k=1, 2, \dots). \end{array} \right.$$

ここで (λ_I, μ_I) -平面上の線分 $L_- : \mu_I = 1, 0 < \lambda_I < 2(n-2)$ [$L_+ : \mu_I = 1, 2(n-2) < \lambda_I$] を考えると、 L_- [L_+] 上で $\frac{d\mu_I}{dA} = -\frac{1}{4}(\lambda_I - 2(n-2))$ は定符号となる。この線分と解曲線 $(\lambda_I(A), \mu_I(A))$ との交点が A に関して単調に $(\lambda_{2k}, 1)$ [$(\lambda_{2k-1}, 1)$], $k=1, 2, \dots$ である。

ゆえに, [8], p. 217, Lemma (6.2) により λ_{2k} [λ_{2k-1}] も単調である. 従って $\lambda_{2k} \nearrow 2(n-2)$, $\lambda_{2k-1} \searrow 2(n-2)$ ($1 \leq k \nearrow \infty$) となる. $\lambda_{II}(A)$ についても同様である. iii) $10 \leq n$ のばあい. 定理 3, (2.17) から $\frac{d\lambda_I}{dA} = (\mu_I - 1)\lambda_I > 0$ となり $\lambda_I(A)$ は単調である. また, $\lambda_{II}(A) = 2n\alpha(\lambda_{II}(A))$ も (2.17) から単調である. \square

$\lambda_I(A)$ [$\lambda_{II}(A)$] の挙動についてこれだけの情報があれば, 問題 I [問題 II] の解の個数の表 (p. 2, 表 1) を得るに充分である.

§4. $b(z; n)$, $\lambda_I(A; n)$, $\lambda_{II}(A; n)$ の漸近展開

この節では, 方程式 (2.8), (3.5)_I, (3.5)_{II} を特異点の近傍で簡単な方程式に変換することによって, $b(z; n)$, $\lambda_I(A; n)$, $\lambda_{II}(A; n)$ の詳しい局所的挙動を調べる. 以下函数記号の中のパラメータ n は略し, $f(n)$ を f と略す.

まず $z \nearrow +\infty$ ($A \nearrow +\infty$) のときの挙動を調べよう.

1) $2 < n$ のばあい. 定理 3, i) より $(\alpha(z), \beta(z))$ は特異点 $O_2: (\alpha, \beta) = (1, \frac{n-2}{n})$ に収束する. 自律系 (2.8) を次のように書きなおそう: $n \neq 10$ のばあい

$$(4.1) \quad z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(y_1, y_2) \\ g_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$

ただし

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{n-2}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_+ & \sigma_- \\ -\frac{n-2}{n} & -\frac{n-2}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \sigma_{\pm} &= \frac{1}{4}(-n-2) \pm \sqrt{(n-2)(n-10)}, \\ g_1 &= \frac{\sigma_-}{\sigma_+ - \sigma_-} (\sigma_+ y_1 + \sigma_- y_2)(y_1 + y_2), \\ g_2 &= -\frac{\sigma_+}{\sigma_+ - \sigma_-} (\sigma_+ y_1 + \sigma_- y_2)(y_1 + y_2). \end{aligned}$$

 $n = 10$ のばあいは,

$$(4.3) \quad z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (y_1 + y_2)(-2y_1, -y_2) \\ 2(y_1 + y_2)(-2y_1, -y_2) \end{pmatrix},$$

ただし

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\pm} = -2.$$

固有値の実部はいつも負である。従って、関係式

$$(4.5) \quad j_1 \sigma_+ + j_2 \sigma_- = \sigma_+ \alpha \sigma_-, \quad j_1 + j_2 \geq 2$$

の成立するような非負の整数の組 j_1, j_2 が存在しない限りは、よく知られているように変換

$$(4.6) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + P_1(u_1, u_2) \\ u_2 + P_2(u_1, u_2) \end{pmatrix},$$

によって (4.1) を $(0, 0)$ の近傍において線型方程式

$$(4.7) \quad z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

に還元することができる。ただし、 $P = P_\ell(u_1, u_2)$, $\ell = 1, 2$, は 2次からはじまる収束する 2重巾級数である。この変換の構成及び証明は、[7], p. 86, 定理 4.2 を参照。一方、(4.5) を満たす非負の整数の組 j_1, j_2 が存在するのは、

$$(4.8) \quad n = n(m) = \frac{z(m^2 + 3m + 1)}{m}, \quad m = 2, 3, \dots$$

のときだけであり, このときは $\sigma_- = m\sigma_+$ となる. このばあい
いは一般には必ずしも線型化はできないが, やはり (4.6) の形
の変換により求積法で解ける方程式

$$(4.9) \quad z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & m\sigma_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h u_1^m \end{pmatrix}$$

に帰着させることができる. ただし, h は (4.1) の非線型項の
主要成分 $g_2(y_1, y_2)$ の y_2^m の項の係数である. この変換を形式
的に構成することができ ([7], p. 83, 定理 4.2), その収束を
先に倣って優級数法で証明すればよい. 今のばあいは実際に
 $h \neq 0$ となるのは $n = n(2) = 11$ のときだけで, あとは線型化
される. さらに, $n = 10$ のときは線型部分が対角化できない
が, このばあいも変換 (4.6) で線型化できる. このようにして
($\alpha(z), \beta(z)$) の $z \nearrow +\infty$ における展開が得られる. 従って,

定理 6. $2 < n$ のばあい, n に依存する定数 C_1, C_2 , 及び
 z 次からはじまる収束 2 重巾級数 $P(u_1, u_2)$ があって, $b(z)$ は
 z が充分大きいとき次のように表現される. i) $2 < n < 10$ の
ばあい

$$(4.10) \quad b(z) = \frac{n-2}{n} z^{-1} \left\{ 1 - 2C_1 z^{-\frac{n-2}{4}} \cos\left(\frac{\sqrt{(n-2)(10-n)}}{4} \log z + C_2\right) + \right. \\ \left. + P[C_1 e^{\sqrt{C_2}} z^{\sigma_+}, C_1 e^{-\sqrt{C_2}} z^{\sigma_-}] \right\},$$

ii) $10 < n$ かつ $n \neq 11$ のばあい

$$(4.11) \quad b(z) = \frac{n-2}{n} z^{-1} \left\{ 1 - c_1 z^{\sigma_+} - c_2 z^{\sigma_-} + P[c_1 z^{\sigma_+}, c_2 z^{\sigma_-}] \right\};$$

iii) $n=10$ のばあい

$$(4.12) \quad b(z) = \frac{4}{5} z^{-1} \left\{ 1 - (c_1 \log z + c_2) z^{-2} - c_1 z^{-2} + P[(c_1 \log z + c_2) z^{-2}, c_1 z^{-2}] \right\};$$

iv) $n=11$ のばあい

$$(4.13) \quad b(z) = \frac{9}{11} z^{-1} \left\{ 1 - c_1 z^{-\frac{3}{2}} - \left(-\frac{3}{2} c_1^2 \log z + c_2 \right) z^{-3} + P\left[c_1 z^{-\frac{3}{2}}, \left(-\frac{3}{2} c_1^2 \log z + c_2 \right) z^{-3} \right] \right\}$$

注. $10 \leq n$ のときは, [6], Theorem 1.2 を定理3のばあいと同様に (p.15 参照) 適用すると, $c_1 > 0$ が得られる.

$a(z)$ も同時に展開される. そこでさらに陰函数の定理を応用した計算 ([9], p.308, Lemma 参照) によって $\lambda_I(A)$ [$\lambda_{II}(A)$] の展開が得られる. それにより, $\lambda_I(A)$ [$\lambda_{II}(A)$] の展開が得られる:

定理6'. $2 < n$ のばあい, 収束する2重巾級数 $P_I(u_1, u_2), P_{II}(u_1, u_2)$ があって, $\lambda_I(A), \lambda_{II}(A)$ は A が充分大きいとき次のように表現される: i) $2 < n < 10$ のばあい, $C = c_1 e^{\sqrt{A} C_2}, C^* = c_1 e^{-\sqrt{A} C_2}$ とし,

$$(4.14) \quad \begin{cases} \lambda_I(A) = 2(n-2) \left\{ 1 - 2 \operatorname{Re} c \left(\frac{n-2}{n} \right)^{\sigma_+} e^{\sigma_+ A} + P_I [C e^{\sigma_+ A}, C^* e^{\sigma_- A}] \right\} \\ \lambda_{II}(A) = 2n \left\{ 1 + 2 \operatorname{Re} \sigma_+ C e^{\sigma_+ A} + P_{II} [C e^{\sigma_+ A}, C^* e^{\sigma_- A}] \right\} \end{cases}$$

ii) $10 < n, n \neq 11$ のばあい

$$(4.15) \quad \begin{cases} \lambda_I(A) = 2(n-2) \left\{ 1 - c_1 \left(\frac{n-2}{n} \right)^{\sigma_+} e^{\sigma_+ A} - c_2 \left(\frac{n-2}{n} \right)^{\sigma_-} e^{\sigma_- A} + P_I [c_1 e^{\sigma_+ A}, c_2 e^{\sigma_- A}] \right\} \\ \lambda_{II}(A) = 2n \left\{ 1 + \sigma_+ c_1 e^{\sigma_+ A} + \sigma_- c_2 e^{\sigma_- A} + P_{II} [c_1 e^{\sigma_+ A}, c_2 e^{\sigma_- A}] \right\} \end{cases}$$

iii) $n=10$ のばあい

$$(4.16) \quad \begin{cases} \lambda_{\text{I}}(A) = 16 \left\{ 1 - \frac{25}{16} c_1 e^{-2A} - \frac{25}{16} e^{-2A} (c_1 A + c_2 - c_1 \log \frac{5}{4}) + \right. \\ \quad \left. + P_{\text{I}} [c_1 e^{-2A}, e^{-2A} (c_1 A + c_2 - c_1 \log \frac{5}{4})] \right\} \\ \lambda_{\text{II}}(A) = 20 \left\{ 1 - \frac{1}{2} c_1 e^{-2A} - e^{-2A} (c_1 A - c_2) + \right. \\ \quad \left. + P_{\text{II}} [c_1 e^{-2A}, e^{-2A} (c_1 A - c_2)] \right\} \end{cases}$$

iv) $n=11$ のばあい

$$(4.17) \quad \begin{cases} \lambda_{\text{I}}(A) = 18 \left\{ 1 - \left(\frac{11}{9}\right)^{3/2} c_1 e^{-3A/2} + \left(\frac{11}{9}\right)^3 e^{-3A} \left(\frac{2}{3} c_1^2 A - c_2 - \frac{2}{3} c_1^2 \log \frac{11}{9}\right) \right. \\ \quad \left. + P_{\text{I}} [c_1 e^{-3A/2}, e^{-3A} (\frac{2}{3} c_1^2 A - c_2 - \frac{2}{3} c_1^2 \log \frac{11}{9})] \right\} \\ \lambda_{\text{II}}(A) = 22 \left\{ 1 - \frac{3}{2} c_1 e^{-3A/2} - \frac{9}{2} e^{-3A} (c_1^2 A - \frac{2}{3} c_2) + \right. \\ \quad \left. + P_{\text{II}} [c_1 e^{-3A/2}, e^{-3A} (c_1^2 A - \frac{2}{3} c_2)] \right\}. \end{cases}$$

2) 次に $0 < n < 2$ のばあいを考える。(2.8)を次のように書きなおす:

$$(4.18) \quad y_1 z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2-n}{2} y_1^2 - \frac{n}{2} y_1^2 y_2 \\ (-1+y_1) y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y_1} \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

定理3, i)により, 解 $(y_1(z), y_2(z)) = (\frac{1}{\alpha(z)}, \beta(z))$ は $z \nearrow +\infty$ のとき $y_1(z) > 0$ を満たしつつ特異点 $(y_1, y_2) = (0, 0)$ に収束する. しかし, (4.18)の右辺の線型部分は固有値が $0, -1$ であり退化している. このような 0 -固有値を持つ Briot-Bouquet 型の特異点の理論は, 一般的に M. Iwano [4]により展開されており, (4.18)はその最も簡単なばあいに当る. (4.18)は, 変換

$$(4.19) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 (1 + P_1(u_1, u_2)) \\ u_2 (1 + P_2(u_1, u_2)) \end{pmatrix}$$

によって

$$(4.20) \quad u_1 z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{z-n}{z} u_1^2 \\ (-1+u_1)u_2 \end{pmatrix}$$

に帰着する。ただし、 $P(u_1, u_2) = P_\ell(u_1, u_2)$, $\ell=1, 2$, は次のような性質をもつ函数である。

$$(4.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta > 0, \theta > 0 \text{ があって, } P(u_1, u_2) \text{ は } u_1 \in S = \\ \{0 < |u_1| < \delta, \operatorname{arg} u_1 < \theta\}, u_2 \in D = \{|u_2| < \delta\} \\ \text{(有界)} \\ \text{の解析函数であり,} \\ P(u_1, u_2) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(u_1) u_2^k \\ \text{と展開され, かつ } p_k(u_1), k=1, 2, \dots, \text{ は } S \ni u_1 \\ \rightarrow 0 \text{ で正しい漸近展開} \\ p_k(u_1) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{kj} u_1^j \\ \text{を持つ.} \end{array} \right.$$

変換 (4.19) の構成の概略を示そう。まず次の偏微分方程式系を考える。

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} [-h u_1^2 \frac{\partial}{\partial u_1} + (-1+u_1)u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}] P_1 = -\frac{n}{2} u_1 u_2 (1+P_1)(1+P_2) \\ [-h u_1^2 \frac{\partial}{\partial u_1} + (-1+u_1)u_2 \frac{\partial}{\partial u_2}] P_2 = P_1 + \frac{P_1(P_2-P_1)}{1+P_1} \end{array} \right.$$

(4.22) が性質 (4.21) を持つ解 $(P_1(u_1, u_2), P_2(u_1, u_2))$ を持つば、

(4.20) の一般解 $u_1 = \frac{1}{C_1} z^{-h}$, $u_2 = C_2 z \exp(-\frac{1}{h} C_1 z^h)$ を (4.19)

に代入したものが (4.18) の解を与える。ただし、 $h = \frac{2-\eta}{2} > 0$.

そこで、(4.22) の解を次の手順で構成する。まず

$$(4.23) \quad \mathbb{P}_l = \sum_{k=1}^{\infty} p_k^{(l)}(u_1) u_2^k, \quad k=1, 2$$

を方程式 (4.22) に代入し、 u_2 の巾について形式的に整理する

と、 u_1 の冪数列に対する線型方程式の列

$$(4.24)_k \quad \left[-h u_1^2 \frac{d}{du_1} + k(-1+u_1) \right] \begin{pmatrix} p_k^{(1)} \\ p_k^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_k^{(1)} \\ p_k^{(1)} + h_k^{(2)} \end{pmatrix},$$

$k=1, 2, \dots$ が生じる。ここに $h_k^{(l)}$, $l=1, 2$, は、 $(p_k^{(1)}, p_k^{(2)})$, $k=1, 2, \dots, k-1$ のみの多項式であることに注意して (4.24) $_k$ の解を逐次決めてゆく。このとき、 u_1 の領域の列 $S_k = \{0 < |u_1| < \delta_k, |\arg u_1| < \theta_k\} \searrow S = \{0 < |u_1| < \delta, |\arg u_1| < \theta\}$ を適当にとれば次のことが成立する：もし $(h_k^{(1)}, h_k^{(2)})$ が $S_{k-1} \ni u_1$ の有界解析函数でありかつ $S_{k-1} \ni u_1 \rightarrow 0$ のとき u_1 の巾級数^(漸近)で展開できるならば、(4.24) $_k$ は $S_k \ni u_1 \rightarrow 0$ のとき u_1 の巾級数で漸近展開できる $u_1 \in S_k$ の有界解析函数の解 $(p_k^{(1)}, p_k^{(2)})$ を一意に持ち、かつそれは次の評価を満たす：

$$(4.25)_k \quad \begin{cases} \|p_k^{(1)}\| \leq \frac{1}{(1-\delta)k} \|h_k^{(1)}\| \\ \|p_k^{(2)}\| \leq \frac{1}{(1-\delta)k} \{ \|p_k^{(1)}\| + \|h_k^{(2)}\| \}. \end{cases}$$

ただし $\|\cdot\|$ は S 上での最大値をあらわす。このようにして、解 $(p_k^{(1)}, p_k^{(2)})$, $k=1, 2, \dots$ を決めたとする。(4.23) の収束を証

するために次の方程式を考える.

$$(4.26) \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\delta} \begin{pmatrix} \frac{\eta}{2} \delta \zeta (1+\phi_1)(1+\phi_2) \\ \phi_1 + \frac{\phi_1(\phi_2+\phi_1)}{1-\phi_1} \end{pmatrix}$$

このとき陰函数の定理により, (4.26)は正の収束半径 δ' を持つ

巾級数解

$$\phi_l = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^{(l)} \zeta^k, \quad \phi_1^{(1)} = \frac{\eta \delta}{2(1-\delta)}, \quad \phi_1^{(2)} = \frac{\eta \delta}{2(1-\delta)^2}$$

を持つ. (4.26)と(4.25) $_k$ を比較すれば

$$(4.27) \quad \|\phi_k^{(l)}\| \leq \phi_k^{(l)}, \quad l=1,2, \quad k=1,2,\dots$$

が成立することがわかる. ゆえに δ を小さくとりなおせば,

(4.23)は $u_1 \in \mathcal{S}$, $u_2 \in \mathcal{D}$ で性質(4.21)を持ち, 方程式(4.22)

の真の解を与える. それゆえ, 次の補題を用いれば, (4.19)

の解 $(y_1(z), y_2(z)) = (\frac{1}{\alpha(z)}, \beta(z))$ にたいし正の数 C_1, C_2 があっ

て充分大きな $z > 0$ に対して

$$\begin{cases} y_1(z) = u_1 \{1 + P_1(u_1, u_2)\}, \\ y_2(z) = u_2 \{1 + P_2(u_1, u_2)\}, \\ u_1 = \frac{1}{C_1} z^{-h}, \quad u_2 = C_2 z \exp\left(-\frac{1}{h} C_1 z^h\right) \end{cases}$$

という表現が成立することがわかる.

補題. $P_l(u_1, u_2)$, $l=1,2$, が性質(4.21)を持つ函数のと

き,

$$(4.28) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 (1 + P_1(u_1, u_2)) \\ u_2 (1 + P_2(u_1, u_2)) \end{pmatrix}$$

と表現される変換 $(u_1, u_2) \rightarrow (y_1, y_2)$ は, δ', θ' を適当にとるとき $y_1 \in \{0 < |y_1| < \delta', |\arg y_1| < \theta'\}$, $y_2 \in \{|y_2| < \delta'\}$ で定義された逆変換をもつ. それはまた性質 (4.21) を持つ函数 $P_l(y_1, y_2)$, $l=3, 4$, によって

$$(4.29) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 (1 + P_3(y_1, y_2)) \\ y_2 (1 + P_4(y_1, y_2)) \end{pmatrix}$$

と表現される.

証明. 任意の $\theta' < \theta_1$ に対して, δ' を充分小さくとるとき, $y_1 \in S' = \{0 < |y_1| < \delta', |\arg y_1| < \theta'\}$, $y_2 \in D' = \{|y_2| < \delta'\}$ で定義された逆変換 $(u_1, u_2) = (\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2))$ で評価

$$(4.30) \quad \begin{cases} |\varphi_1(y_1, y_2) - y_1| \leq C |y_1| |y_2| \\ |\varphi_2(y_1, y_2) - y_2| \leq C |y_2|^2 \end{cases}$$

を一樣に満たすものを構成することは容易である. そこでこれらの函数が (4.29) の表現をもつことを示そう. (4.30) から $\varphi_2(y_1, y_2)$ は $y_1 \in S'$ のとき $y_2 \in D'$ に関して一樣に有界な解析函数であるから,

$$(4.31) \quad \begin{cases} \varphi_1(y_1, y_2) = y_1 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1)}(y_1) y_2^k \right\} \\ \varphi_2(y_1, y_2) = y_2 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2)}(y_1) y_2^k \right\} \end{cases}$$

と展開される. このとき $\varphi_k^{(l)}(y_1)$ は $y_1 \in S'$ の解析函数であって, 次の評価を満たす.

$$|\varphi_k^{(1)}(y_1)| \leq \frac{C}{(\delta')^k} \quad (y_1 \in S')$$

そこで,

$$(4.32) \quad P_3(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1)}(y_1) y_2^k, \quad P_4(y_1, y_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2)}(y_1) y_2^k$$

が性質 (4.21) を持つことを示すためには, $\varphi_k^{(l)}(y_1)$, $l=1, 2$, $k=1, 2, \dots$ が $S' \ni u_1 \rightarrow 0$ で成立する u_1 の巾級数による漸近展開を持つことを示せばよい. P_3, P_4 は次の方程式を満たしている:

$$(4.33) \quad \begin{cases} -P_3 = (1+P_3)P_1(y_1(1+P_3), y_2(1+P_4)) \\ -P_4 = (1+P_4)P_2(y_1(1+P_3), y_2(1+P_4)) \end{cases}$$

この右辺は, y_2, P_3, P_4 の, y_1 の函数を係数とする収束する巾級数 $\sum_{j_0+j_1+j_2 \geq 1} q_{j_0 j_1 j_2}^{(l)}(y_1) \Phi^{j_0} P_3^{j_1} P_4^{j_2}$ に展開され, 各係数 $q_{j_0 j_1 j_2}^{(l)}$ は P_1, P_2 の展開係数 $p_{i_1 i_2}^{(l)}$ 及びそれらの導函数の高々有限個の多項式である. 従って, (4.32) を (4.33) に代入し y_2 の巾の係数を比較すれば, $(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)})$ が高々有限個の P_1, P_2 の係数函数及びその導函数と $(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)})$, $k=1, \dots, k-1$ の多項式で逐次決まることがわかる. 従って帰納的に $\varphi_k^{(l)}$ も y_1 の巾級数に漸近展開できる. \square

このようにして次の定理を得る.

定理 7. $0 < m < 2$ のばあい, 定数 $C_1 > 0, C_2 > 0$ 及び (4.21) の性質をもつ函数 $P(u_1, u_2)$ があって, $z > 0$ が充分大きいとき $b(z)$ は次のように表現される.

$$(4.22) \quad b(z) = C_2 \exp\left(-\frac{2}{2-n} C_1 z^{\frac{2-n}{2}}\right) \left\{ 1 + P\left(\frac{1}{C_1} z^{-\frac{2-n}{2}}, C_2 z \exp\left(-\frac{2}{2-n} C_1 z^{\frac{2-n}{2}}\right)\right) \right\}.$$

表現 (4.22) と同時に $a(z)$ も

$$(4.23) \quad a(z) = c_1 z^{-(1-h)} \{ 1 + P_1(u_1, u_2) \},$$

$$\text{ただし } u_1 = \frac{1}{c_1} z^{-h}, \quad u_2 = c_2 c_1^{-\frac{1}{h}} \exp\left(-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{u_2} + \log u_2\right)\right),$$

$$h = \frac{2-n}{2}.$$

という形に表現できる. (4.22) 及び (4.23) から $\lambda_I(A)$, $\lambda_{II}(A)$ の同様の表現を求めることができる. 以下しばらく $P_l(u_1, u_2)$, $l=1, 2, \dots$ は性質 (4.21) を持つ函数とする. まず, (4.22) から,

$$\begin{cases} \xi_1 = -[h \log(c_2^{-1} b)]^{-1}, & \xi_2 = c_2 c_1^{-\frac{1}{h}} \exp\left(-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\xi_1} + \log \xi_1\right)\right), \\ u_1 = (c_1^{-\frac{1}{h}} z)^{-h}, & u_2 = c_2 c_1^{-\frac{1}{h}} \exp\left(-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{u_2} + \log u_2\right)\right) \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} \xi_1 = u_1 \{ 1 + P_2(u_1, u_2) \} \\ \xi_2 = u_2 \{ 1 + P_3(u_1, u_2) \} \end{cases}$$

という関係が成立する. このとき先の補題を適用することができるから,

$$\begin{cases} u_1 = \xi_1 \{ 1 + P_4(\xi_1, \xi_2) \} \\ u_2 = \xi_2 \{ 1 + P_5(\xi_1, \xi_2) \} \end{cases}$$

という表現が成立する. $b = e^{-A}$, $z = z_I(A)$ を代入すれば

$$\begin{aligned} z_I(A) &= c_1^{-\frac{1}{h}} \xi_1^{-\frac{1}{h}} \{ 1 + P_4(\xi_1, \xi_2) \}^{-\frac{1}{h}} \\ &= c_1^{-\frac{1}{h}} h^{\frac{1}{h}} (A + \log c_2)^{\frac{1}{h}} \{ 1 + P_6(\xi_1, \xi_2) \}, \\ \text{ただし} \quad \xi_1 &= h^{-1} (A + \log c_2)^{-1}, \\ \xi_2 &= c_2 c_1^{-\frac{1}{h}} h^{\frac{1}{h}} (A + \log c_2)^{\frac{1}{h}} e^{-(A + \log c_2)} \end{aligned}$$

という表現が得られる。これから $\lambda_I(A) = 2m e^{-A} Z_I(A)$ の表現が直ちに従う。 $\lambda_{II}(A)$ の表現も (4.23) から同様にして従う。ゆえに

定理 7' $0 < n < 2$ のばあい、性質 (4.21) を持つ函数 $P_I(u_1, u_2)$, $P_{II}(u_1, u_2)$, があって、 $A > 0$ が充分大きいとき $\lambda_I(A)$, $\lambda_{II}(A)$ は次のように表現される。

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_I(A) = 2m C_1^{-\frac{1}{h}} h^{\frac{1}{h}} (A + \log C_2)^{\frac{1}{h}} e^{-A} \{1 + P_I(u_1, u_2)\} \\ \text{ただし } u_1 = h^{-1} (A + \log C_2)^{-1}, u_2 = C_1^{-\frac{1}{h}} h^{\frac{1}{h}} (A + \log C_2)^{\frac{1}{h}} e^{-A} \\ \lambda_{II}(A) = 2m C_1^{\frac{1}{1-h}} e^{\frac{A}{1-h}} \{1 + P_{II}(u_1, u_2)\} \\ \text{ただし } u_3 = C_1^{-\frac{1}{1-h}} e^{-\frac{h}{1-h} A}, u_4 = C_2 C_1^{\frac{h}{1-h}} \exp\left[\frac{A}{1-h} - \frac{1}{h} C_1^{\frac{1}{1-h}} e^{\frac{h}{1-h} A}\right], \\ h = \frac{2-n}{2}. \end{array} \right.$$

3) 最後に $Z \searrow -p = -p(n)$ のときの挙動を調べる。定理

3. iii) により

$$(2.18) \quad \frac{1}{\alpha(z)} \rightarrow 0, \quad \frac{\beta(z)}{\alpha(z)^2} \rightarrow -\frac{1}{n} \quad (z \rightarrow -p)$$

であるから、これを考慮して方程式 (2.18) を次のように変形する。

$$(4.25) \quad y_1 z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-\frac{n}{2} y_1 - \frac{1}{2} y_2) y_1 \\ -(n-1)(n-2) y_1^2 - 2(n-1) y_1 y_2 - y_2^2 \end{pmatrix}$$

ただし

$$y_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad y_2 = 1 + \frac{n\beta}{\alpha^2} - \frac{2(n-1)}{\alpha}.$$

(2.18)から対応する (4.25) の解 $(y_1(z), y_2(z))$ は $z \rightarrow -\rho$ のとき $Q_2 : (y_1, y_2) = (0, 0)$ に収束する。一方, (4.25) は Q_2 の近傍で

$$(4.26) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 (1 + P_1(u_1, u_2)) \\ u_2 + P_2(u_1, u_2) \end{pmatrix}$$

の形の変換により

$$(4.27) \quad u_1 z \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h u_1^2 \end{pmatrix} \quad h = -(m-1)(m-2)$$

に帰着する。ただし, $P_1(u_1, u_2)$ [$P_2(u_1, u_2)$] は, 1次から [2次から] はじまる収束する二重巾級数である。この変換の構成は 1) のばあいと同じ手順であり, 特に P_1 の 1 次の項は $-\frac{n}{2}u_1 - \frac{1}{3}u_2$ となる。したがって対応する (4.27) の解 $(u_1(z), u_2(z))$ に対し,

$$(4.28) \quad u_1 = \frac{1}{2} \log \frac{z}{-p}, \quad u_2 = u_1^2 (2h \log u_1 + c)$$

となる定数 c が存在する。 u_1, u_2 を改めて

$$x_1 = -\frac{z+p}{p}, \quad x_2 = \left(\frac{z+p}{-p}\right)^2 (h \log \frac{z+p}{-p} + c'),$$

$$c' = -h \log z + \frac{c}{z}$$

で展開すれば

$$(4.29) \quad \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2} x_1 \left\{ 1 + \frac{n+2}{4} x_1 - \frac{1}{6} x_2 + P_3(x_1, x_2) \right\} \\ y_2 = -\frac{1}{2} x_2 + P_4(x_1, x_2) \end{cases}$$

となる。ここに $P_3(x_1, x_2)$, $P_4(x_1, x_2)$ は 2次からはじまる収束二重巾級数である。(4.29) から直ちに $\alpha(z)$, $\beta(z)$ の展開が得られる。こうして, 次の定理を得る。

定理 8. $0 < n < \infty$ のばあい定数 c と 2 次からはじまる収束する二重巾級数 $P(u_1, u_2)$ があって, $b(z)$ は $z+p > 0$ が充分小さいとき次のように表現される.

$$(4.30) \quad b(z) = \frac{n}{4p} \left(\frac{z+p}{p}\right)^{-2} \left\{ 1 + \frac{n-2}{2} \left(\frac{z+p}{p}\right) + \frac{1}{6} \left(\frac{z+p}{p}\right)^2 \left((n-1)(n-2) \log \frac{z+p}{p} + c \right) + P(u_1, u_2) \right\}$$

ただし, $u_1 = \frac{z+p}{p}$, $u_2 = \left(\frac{z+p}{p}\right)^2 \left((n-1)(n-2) \log \frac{z+p}{p} + c \right)$.

この表現から §1, 4) の評価 (1.10) が成立し, $n \neq 1$, $n \neq 2$ のときは $b(z)$ は $z = -p$ を代数的分岐点でも極でもないことがわかる. 表現 (4.30) と同時に $a(z)$ も

$$(4.31) \quad a(z) = \frac{2}{p} \left(\frac{z+p}{p}\right)^{-1} \left\{ 1 - \frac{n-2}{4} \frac{z+p}{p} - \frac{1}{6} \left(\frac{z+p}{p}\right)^2 \left((n-1)(n-2) \log \frac{z+p}{p} + c \right) + P'(u_1, u_2) \right\},$$

と表現される. ここに, u_1, u_2 は (4.30) と同じで, $P'(u_1, u_2)$ は 2 次からはじまる収束する二重巾級数である.

さらに, (4.30), (4.31) から逆函数の定理を応用した計算により $\lambda_I(A)$, $\lambda_{II}(A)$ の表現が得られる:

定理 8'. $0 < n < \infty$ のばあい, 2 次からはじまる収束する二重巾級数 $P_I(u_1, u_2)$, $P_{II}(u_1, u_2)$ があって, $-A$ が充分大きいとき, $\lambda_I(A)$, $\lambda_{II}(A)$ は次のように表現される:

$$(4.30) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{\text{I}}(A) = -2m\rho e^{-A} \left\{ 1 - \left(\frac{ne^A}{4\rho}\right)^{1/2} + \right. \\ \quad \left. + P_{\text{I}} \left[\left(\frac{ne^A}{4\rho}\right)^{1/2}, \frac{ne^A}{4\rho} \left(\frac{\hbar}{2}A + \frac{\hbar}{2} \log \frac{n}{4\rho} + c \right) \right] \right\} \\ \lambda_{\text{II}}(A) = -2m\rho e^{-A} \left\{ 1 - \frac{ze^A}{\rho} + \right. \\ \quad \left. + P_{\text{II}} \left[\frac{ze^A}{\rho}, \left(\frac{ze^A}{\rho}\right)^2 \left(\hbar A + \hbar \log \frac{z}{\rho} + c \right) \right] \right\} \end{array} \right.$$

ただし

$$\hbar = (n-1)(n-2).$$

参考文献

- [1] S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure, Univ. of Chicago Press, 1939.
- [2] I. M. Gel'fand, Some problems in the theory of quasi-linear equations, Uspehi Mat. Nauk., 14(86), (1959), 87 - 158.
- [3] E. Hille, Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, John Wiley, New York, 1976.
- [4] M. Iwano, On a singular point of Briot-Bouquet type of a system of ordinary non-linear differential equations, Commentariorum Mathematicorum Universitatis Sancti Pauli, 11 (1963), pp. 37 - 78.
- [5] D.D. Joseph & T. S. Lundgren, Quasilinear Dirichlet problems driven by positive sources, Arch. Rational Mech. Anal., 49 ((1972-73), pp. 241 - 269.

- [6] Y. Kametaka, On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type, Osaka J. Math., 13 (1976), pp. 11 - 16.
- [7] 木村俊房, 常微分方程式 II (講座基礎数学), 岩波, 1977
- [8] S. Lefschetz, Differential Equations: Geometric Theory, John Wiley, New York, 1957.
- [9] R. A. Smith, Singularities of solutions of certain plane autonomous systems, Proc. R. S. Edinburgh, (A) 72 (1973-74), pp. 307 - 315.