

Multiplicity of Bifurcation & Newton boundary の位相について

東大理 岡 睦雄

A. G. Kouchnirenko は [1] において、次の美しい公式を示した。 $V = f^{-1}(0)$ を \mathbb{C}^n の原点の近傍で正則な函数 $f(z)$ で定義された超曲面で、原点で孤立特異点を持ち、 f の Newton 主要部が非退化ならば、 f の 0 での Milnor 数 $\mu(f, 0) = \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] / (\frac{\partial f}{\partial z_j}))$ が多面体 $T(f)$ の "Newton 数" と一致する事を示した。彼の証明は極めて代数的でありベクトル空間 $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n] / (\frac{\partial f}{\partial z_j})$ の階数に "Newton filtration" を使って巧みに計算している。

この草稿では $\mu(f, 0)$ は Milnor fiber の Middle Betti 数であり、それは連立方程式 $\frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$ の $z=0$ の多重指数数でもあるという立場から、幾何的に Bifurcation を用いて、得らるる事を示す。

1. 種々の定義. ([1], [2] 参照).

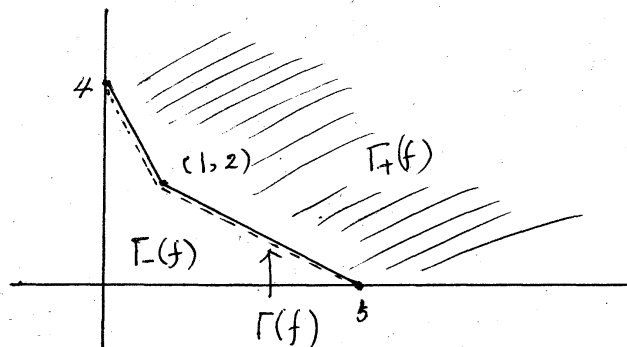
$f(z) = \sum_{\nu} a_{\nu} z^{\nu}$ ε $z=0$ を中心とした Taylor 展開とする。

(ν は \mathbb{Z}^n の元であり, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ のとき $z^{\nu} = z_1^{\nu_1} \dots z_n^{\nu_n}$.)

$a_{\nu} \neq 0$ なる ν についてその上半空間 $\nu + (\mathbb{R}^+)^n$ ε とし, その $\nu, (a_{\nu} \neq 0)$ での和集合の凸包を $\Gamma_+(f)$ で表し, そのコンパクトな面で境界に含まれるものの全体を $\Gamma(f)$ で表わし,

Newton 境界 と呼ぶ。 $\Gamma(f)$ で $(\mathbb{R}^+)^n - \Gamma_+(f)$ ε 表す。

例. $f(z) = z_1^5 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_2^2 + z_2^4$



$\Gamma(f)$ は自然に多面体 ($(n-1)$ 次元) になる。 $\Delta \in \Gamma(f)$ の任意の(閉)面とした時, $f_{\Delta}(z) \in \sum_{\nu \in \Delta} a_{\nu} z^{\nu}$ で定義する。 f_{Δ} が $\Delta \in \Gamma(f)$ で非退化とは $\frac{\partial f_{\Delta}}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f_{\Delta}}{\partial z_n} = 0$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ で根を持つことを示す。 f が非退化とは任意の面 $\Delta \in \Gamma(f)$ で f_{Δ} は非退化である時を言う。 f の Newton 主要部 $\varepsilon \sum_{\nu \in \Gamma(f)} a_{\nu} z^{\nu}$ で定義する。

P が \mathbb{R}^n のコンパクトな多面体の時, Newton 数 $\nu(P)$ ε $\sum_{I \subset \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{n+|I|} n! \text{Volume}(P_I)$ で定義する。 ただし, $P_I = \{x \in P; x_j = 0 \text{ } j \notin I\}$ で, $\text{Volume}(P_I)$ は $|I|$ 次元の Euclidean の体積。

上の例では $\nu(\Gamma(f)) = 14 - (5+4) + 1 = 6$.

$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ が \mathbb{C}^n の原点の近傍から \mathbb{C}^n の解析写像で、 $\varphi(0) = 0$, $\varphi^{-1}(0)$ の中で 0 が孤立しているとする。その時 $\varepsilon > 0$ を十分小さく取り $D_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| \leq \varepsilon\}$ と $\varphi^{-1}(0)$ の共通部分が 0 のみになる。その時方程式 $\varphi_1(z) = \dots = \varphi_n(z) = 0$ の 多重指数 を $\tilde{\mu} = \varphi / \|\varphi\| : \partial D_\varepsilon \rightarrow S^{2n-1}$ の写像としての次数で定義する。これを $\mu(\varphi, 0)$ で表す。更に解析写像の解析的族 $\{\varphi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ が与えられ、 $\varphi_0 = \varphi$ 、 $\varphi_t^{-1}(0) \cap \partial D_\varepsilon = \emptyset$ のとき、分岐指数 $Bf(\varphi_t, 0) \in \mathbb{Z}$ を $\mu(\varphi_0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \mu(\varphi_t, 0)$ で定義する。

2. 以下では $f(z)$ は Newton 主要部が非退化で、 $\Gamma(f)$ は各座標軸 $R_i = \{x \in \mathbb{R}^n; x_j = 0 \text{ } j \neq i\}$ と空でなく交ると仮定しよう。

f の原点での多重指数は次の方程式:

$$(M): \frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$$

の $\mu(M, 0)$ と一致する。([2])。これを直接計算する代わりに、

$$(A): z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0$$

を考える。 $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ に対して、 $f_I(z^I) \in f$ の $\mathbb{C}^I = \{z \in \mathbb{C}^n; z_j = 0 \text{ } j \notin I\}$ とすると、非退化の仮定より容易に f_I も \mathbb{C}^I で孤立特異点 z (原点で) 持つ事がわかる。

多重指数の加法性より容易に

$$\text{命題: } \mu(A, 0) = \sum_I \mu(f_I, 0) \quad , \quad (\mu(f_\emptyset, 0) = 1).$$

これにより $\mu(A, 0)$ より $\mu(f, 0)$ が求められる。

$\Sigma(A)$ の計算の為に、 $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$ を固定して、

$$(A_t): \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} - t \gamma_j = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

を考慮しよう。次の定理が主定理である。

定理 1. f の Newton 主要部の係数が一般で、 γ が $\Gamma(f)$ に
対して一般であれば、 $\forall t, \mu(A_t, 0) = n! \text{ volume } \Gamma(f)$.

しかも $t \neq 0$ が十分小ならば、 (A_t) の根は全て単純。

注意. $\Delta \in \Gamma(f)$ に対して、 $L(\Delta) \subseteq \Delta$ の頂点 t 生成される

\mathbb{C}^n の vector space とする。 γ が $\Gamma(f)$ に対して一般の時
 $v_1, \dots, v_k \in \Gamma(f)$ の任意の頂点とし、 $\gamma \in L(v_1, \dots, v_k)$ ならば
 $\text{rank}(v_1, \dots, v_k) = n$.

$$\text{系. } \mu(f, 0) = \mu(M, 0) = \nu(\Gamma(f)).$$

これは上の定理及び命題より直ちに得られる。

3. 証明の方針及び注意。

A_t の根 $z(t)$ で $z(t) \rightarrow 0, (t \rightarrow 0)$ なるものは、曲線選択
定理より、解折曲線で表される。ゆえに今

$$z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t)), \quad t = s^b$$

$$z_j(t) = a_j s^{q_j} + \text{higher } \text{と} \text{する. } (j=1, \dots, n).$$

$$la(x) = \sum_{j=1}^n a_j x_j \text{ を考える. } I = \{i \mid z_i(s) \neq 0\}.$$

$\lambda a | \Gamma(f_x)$ が最大値をとる面を Δ とする。その時 (A_t) に $(z^0), \lambda^0$ の最初の項を比べると、次の方程式を得る。

$$\alpha_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(\alpha) = \gamma_j \quad (j=1, \dots, n)$$

ただし、 $\alpha_j = 0$ かつ $j \notin I$ 。 γ の一般性の仮定より $I = \{1, \dots, n\}$ で、 $\dim \Delta = n-1$ と得る。従って問題は次の二つに分けられる。

(I) $\Delta \in \Gamma(f)$, $\dim \Delta = n-1$ の時、

$$B_\Delta(\gamma) : \alpha_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(\alpha) = \gamma_j \quad (j=1, \dots, n)$$

が $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ の方程式として $(\mathbb{C}^*)^n$ に何個の根をもちか。

(II) $B_\Delta(\gamma)$ の解と (A_t) (or (A)) の解の対応はどうか。

(I) は難しいが (II) は次の様に明解な回答を与えられる。

今、 $m(\Delta)_1 x_1 + \dots + m(\Delta)_n x_n = d(\Delta)$ と Δ の定義方程式で各 $m(\Delta)_j$ は正の整数とする。

補題: (I) の孤立解を一つ固定 (これを α^0 とする) して、 α^0 の $B_\Delta(\gamma)$ での多重指数を $\mu(B_\Delta(\gamma), \alpha^0)$ とする。その時 $\lambda \in$ 十分小さくとれば $\alpha^0(\lambda) = (\alpha_1^0 \lambda^{m(\Delta)_1}, \dots, \alpha_n^0 \lambda^{m(\Delta)_n})$

の十分近くには $A_{\Delta(\alpha)}$ の根が多重性 μ をもつ度 $\mu(B_\Delta(\gamma), \alpha^0)$

が存在する。これは写像度に対する Rouché の原理及び、

f の非退化性より直ちに得られる。(略)

(I) については次の補題が Key とする答である。

補題: $B_\Delta(Y)$ は d 度 $n!$ volume $\Delta(0)$ の単純根をもつ
(ただし係数は一般, $\Delta(0)$ は Δ と原点との Cone).

この補題の証明を完全に与えるには紙数が足りないのぞ、
省略するが、一番簡単な時の outline を与えておこう。今 Δ の
頂点が d 度 n コでそれと z^1, \dots, z^n とする。 $f_\Delta(z) = \sum_{j=1}^n c_j z^{z_j}$
と書ける。この時 $B_\Delta(Y)$ は、

$$\begin{pmatrix} z_1^1 & \dots & z_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ z_n^1 & \dots & z_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 z^{z_1^1} \\ \vdots \\ c_n z^{z_n^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

と書ける。行列 $M = (z_j^i)$ の逆行列を求めれば、

$$\begin{pmatrix} c_1 z^{z_1^1} \\ \vdots \\ c_n z^{z_n^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \quad \left(\forall d_j \neq 0 \right)$$

と書ける。 $d = \det M$ とし、 $N = d \cdot M^{-1}$ とすれば
 N は整数行列で、 $\det N = d^{n-1}$ 。今変換 $\alpha = \beta^N$
とて、 $\alpha_j = \beta_1^{n_1} \dots \beta_n^{n_n}$ と考えれば、 $\beta \mapsto \alpha$ は $(\mathbb{C}^*)^n \rightarrow$
 $(\mathbb{C}^*)^n$ の d^{n-1} fold covering map である。一方上の方
程式は β の Y 表に書きなおすと、

$$\begin{pmatrix} c_1 \beta_1^d \\ \vdots \\ c_n \beta_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

明らかになるのは d^n の単純根をもつ。従って、前の方程式は
 $d^n/d^{n-1} = d$ の単純根をもつ。 $d = n! \text{ volume } \Delta(0)$
 であるから、主張はこの場合正しい。

注意. 詳細は [3] を参照してほしい。

文献.

[1] A.G. Kouchnirenko: Polyhedres de Newton et nombres de Milnor. *Inv. math.* 32, (1976)

[2] J. Milnor: Singular points of complex hypersurfaces. *Ann of Math. Studies* 61. (1968)

[3] M. Oka: On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, to appear.