数理解析研究所講究録
317巻 1978年 52-72

神経の数学モデルの応答特性

東大　工学部　　吉田　利信

あらまし　Harmonは電子回路によって神経細胞のモデルを作り，実験によって入力の大きさと出力の興奮頻度との関係が"特異的"であることを示した。Nagumo and Satoは神経細胞を不応期を持つ閾素子とみなし，これを非線形差分方程式によって記述した。不応特性として，過去の影響が時間と共に指数的に減少する形式を仮定し，また入力としては定常入力を仮定した。この場合，(1)構成的に定義されるある集合と周期的な出力全体との間に一対一の対応が存在し，(2) Harmonの示した"特異的"な入出力関係が一般化されたCantor関数で表わされることを示した。

本稿では，不応特性として狭義単調減少かつ下に凸の形式を仮定し，入力は周期入力を仮定する。この場合上と同様に次のことが示される。(1)すべての正整数mに対して，集合A_mを構成的に定義する。このA_mと，周期がmの入力に対

する周期出力全体との間に一対一の対応が存在する。(2) m が1, 2および3のとき, m 周期入力と出力頻度との関係が一般化されたCantor関数で表わされる。

1. まえがき

Harmon[1]は電子回路によって神経細胞のモデルを作り, 実験によって"特異的な現象"を見出した。すなわち神経モデルに一定の大きさの入力を加えたとき, その入力の大きさと神経モデルの興奮頻度との関係が図1に示すように階段状になることを示した。

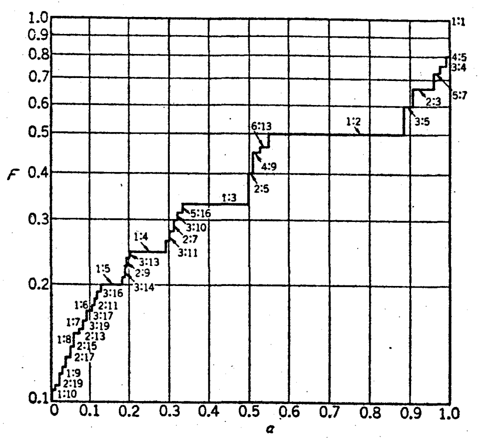

図1　a：入力の大きさ, F：出力頻度, 図中 $x:y$ は周期が y の出力で, x 回神経が興奮することを示す.

Nagumo and Sato[2]は神経細胞を不応期を持つ閾素子とみなし, これを非線形差分方程式で記述した。不応特性として過去の影響が時間と共に指数的に減少する形式を仮定し, また入力としては定常入力を仮定した。この場合, 構成的に定義されるある集合と周期的な出力全体との間に一対一の対応が存在し, Harmonの示した"特異的"な入出力関係が一般化されたCantor関

数で表わされることを示した。

南雲[3]は $0^m A$ の形の周期入力に対しても定常入力の場合と同様に扱えることを示した。また Sato, Hatta and Nagumo[4]は, OAA の形の周期入力に対する周期出力について考察している。しかし，一部不充分な所がありすべての周期出力列を尽していない。

増田，南雲[5]は不応特性をある特殊な形にしたときの定常入力に対する周期出力を記述し，さらに定常入力の大きさと出力頻度との関係が本来の Cantor 関数と一致することを示した。

永見，他[6][7]は，有限の過去のみの影響を受けるような不応特性のもとで，定常入力に対する周期出力について考察している。

本稿では，不応特性として狭義単調減少かつ下に凸の形式を仮定し，入力は周期入力を仮定する。この場合における周期出力全体を構成的に記述し，入力空間の構造について調べる。

2. 神経モデル

神経細胞は不応期を持つ閾素子とみなすことができる。時刻 t における神経細胞の状態を $x(t)$ と表わし，静止状態の

とき値0をとり，興奮状態のとき値1をとることにする。時刻tにおいて加えられる入力の大きさを$a(t)$で表わす。不応特性を数列$\{b_r\}$で表わす。これはr単位時間過去に神経細胞が興奮しているときb_rだけ現時点の興奮が抑えられることを意味している。閾値は入力に含めて考えここでは0と仮定する。このとき神経細胞をCaianiello流に次のようにモデル化する。

$$x(t) \equiv \mathbb{1}\left[\, a(t) - \sum_{r=1}^{\infty} b_r x(t-r) \right]$$

$$\mathbb{1}[u] \equiv \begin{cases} 1 & (u \geq 0) \\ 0 & (u < 0) \end{cases}$$

Nagumo and Sato[2]は次の場合における応答特性を調べた。

(i) 入力が一定　$a(t) \equiv a,\ t = 0, 1, 2, \cdots$

(ii) 不応特性が指数的に減少　$\mathbb{b} = \{ b_r \mid b_r = c^{-r},\ c > 1,\ r = 1, 2, \cdots \}$

(iii) 初期状態がすべて静止状態　$I = \{ x(t) = 0 \mid t = -1, -2, \cdots \}$

本稿では上の場合を拡張し，次の場合における応答について調べる。

(i') 入力が周期的　$a(t) = a_i,\quad t \equiv i \pmod{m},\ i = 0, 1, \cdots, m-1$

(ii') 不応特性が狭義単調減少かつ下に凸

$$\mathbb{b} = \left\{ b_r > 0 \;\middle|\; b_r - b_{r+1} > b_{r+1} - b_{r+2} > 0,\ r = 1, 2, \cdots,\ \sum_{r=1}^{\infty} b_r < \infty \right\}$$

(iii) 初期状態は任意

周期がmの入力をm入力ベクトル

$$\mathbb{a} = (a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}) \in \mathbb{R}^m \quad , \mathbb{R}: 実数全体$$

で表わし，不応特性と初期状態をそれぞれ$\mathbb{b}$とIで表わす。不応特性$\mathbb{b}$，m入力ベクトル$\mathbb{a}$，初期状態Iに対する神経モデルの出力がある過渡変化の後に周期的になる場合，この周期列を$\mu(\mathbb{a}, I, \mathbb{b})$と書く。つまり，ある$n=lm$と$T=km$が存在して$t \geq T$なる任意の$t$に対して

$$x(t) = x_i \quad , \quad t \equiv i \pmod{n} \quad , i = 0, 1, \cdots, n-1$$

となるとき，このn周期列$x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$を$\mu(\mathbb{a}, I, \mathbb{b})$と表わす。

0と1よりなる列$\mathbb{x} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$に対して次の記号を定義する。

$|\mathbb{x}| \equiv n$，　$\mathbb{x}$の長さ

$\|\mathbb{x}\| \equiv \sum_{i=0}^{n-1} x_i$，　$\mathbb{x}$中の1の数

$\rho(\mathbb{x}, i) \equiv x_{i-1}\cdots x_0 x_{n-1}\cdots x_i$，　x_iが末尾となるような$\mathbb{x}$の回転

$\tilde{\mathbb{x}} \equiv \{\rho(\mathbb{x}, km) \mid n = lm, k = 0, 1, \cdots, l-1\}$，

mの倍数の回転全体

不応特性が$\mathbb{b}$のとき，周期がmの入力に対する周期出力全体を$H_m(\mathbb{b})$と表わし，次のように定義する。

$$H_m(\mathbb{b}) \equiv \{ \tilde{x} \mid x = \kappa(a, I, \mathbb{b}),\ R^m \ni {}^\forall a, {}^\forall I \}$$

次節で周期列の集合 A_m を構成的に定義し，4節以降で A_m と $H_m(\mathbb{b})$ との関係を調べる。

3. A_m の定義とその性質

0と1よりなる列 $u = u_{k-1} u_{k-2} \cdots u_0$, $v = v_{l-1} v_{l-2} \cdots v_0$ に対して，連接と繰り返しをそれぞれ次のように定義する。

$$uv \equiv u_{k-1} u_{k-2} \cdots u_0 v_{l-1} v_{l-2} \cdots v_0$$

$$u^n \equiv \underbrace{u\, u \cdots u}_{n \text{個}}$$

A_1 を次のように帰納的に定義する。

(i) A_1 は 0と1を含む。0，1をそれぞれ $[\![0]\!]$, $[\![1]\!]$ と表わす。

(ii) A_1 が $u = [\![i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k]\!]$ と $v = [\![i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k + 1]\!]$ を共に含むとき，任意の整数 i_{k+1} に対して A_1 は $[\![i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}, i_k, i_{k+1}]\!]$ を含む。これは次のように定義される。

$i_{k+1} < 0$ のとき $u^{|i_{k+1}|+1} v$

$i_{k+1} \geq 0$ のとき $u v^{|i_{k+1}|+1}$

(iii) A_1 は (i), (ii) で定義される要素以外の要素を含まない。

A_1 の要素 $x=[\![i_0, i_1, \cdots, i_k]\!]$ に対して，整数上の関数 $\tau(x)$ を次のように定義する。

$$\alpha(x) \equiv \begin{cases} -|[\![i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}]\!]| & , k \geq 1 , i_k < 0 \\ |[\![i_0, i_1, \cdots, i_{k-1}+1]\!]| & , k \geq 1 , i_k \geq 0 \\ 0 & , k = 0 \end{cases}$$

$$\tau(x) \Longleftrightarrow i^{\tau(x)} \equiv \alpha(x) i \pmod{|x|}, \ 0 \leq i^{\tau(x)} < |x|$$

このように定義された A_1 および τ に対して，次の補題が成立する。

補題 1.

A_1 の要素 $x = x_{l-1} x_{l-2} \cdots x_0$ に対して，$\tau = \tau(x)$ と置くとき，

(i) τ は $\{0, 1, \cdots, l-1\}$ 上の置換である。

(ii) $x_{j\tau} = \begin{cases} 1 , & 0 \leq j < \|x\| \\ 0 , & \|x\| \leq j < |x| \end{cases}$

(証明は省略)

この補題 1 は x 中の 1 が置換 τ による順序に配置されていることを示している。A_m の定義はこの補題を拡張した形で行なう。

A_1 の要素 x' とパラメーター $j = (j_0, j_1, \cdots, j_{m-1})$ に対して，$l = |x'|$，$\tau = \tau(x')$ と置いたとき，

$$\xi(x', j) \equiv x_{lm-1} x_{lm-2} \cdots x_0$$

$$x_{j^\tau m+i} \equiv \begin{cases} 1, & j_{i-1}+1 \leq j \leq j_i \\ 0, & j_i+1 \leq j \leq j_{i-1}+l \end{cases} \quad i=0,1,\cdots,l-1$$

と定義する。この定義から明らかなように，パラメータ $\mathbb{j}$ は部分列 $\{x_{km+i} \mid k=0,1,\cdots,l-1\}$ 中の 1 の数が $j_i - j_{i-1}$ 個であることを示している。

【1】と異なる $\mathbb{x}'$ に対するパラメータ全体 $J_m(\mathbb{x}')$ および A_m を次のように定義する。

$$J_m(\mathbb{x}') \equiv \{(j_0, j_1, \cdots, j_{m-1}) \mid 0 \leq j_i - j_{i-1} \leq l, \quad j_{-1}=-1, \; j_{m-1} \equiv \|\mathbb{x}'\|-1 \pmod{l}\}$$

$$A_m \equiv \{\xi(\mathbb{x}', \mathbb{j}) \mid A_1 \ni \mathbb{x}' \neq [\![1]\!], J_m(\mathbb{x}') \ni \mathbb{j}\}$$

次に A_m の性質を調べる。不応特性 $\mathbb{b}=\{b_r\}$ に対して，0 と 1 の列 $\mathbb{x} = x_{n-1} \cdots x_0$ から実数への写像 φ を次のように定義する。

$$\varphi(\mathbb{x}, \mathbb{b}) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k}^{(n)} x_k, \quad b_k^{(n)} \equiv \sum_{l=0}^{\infty} b_{ln+k}, \quad k=1,2,\cdots,n$$

A_m の要素 $\mathbb{x} = \xi(\mathbb{x}', \mathbb{j})$，$A_1 \ni \mathbb{x}'$，$J_m(\mathbb{x}') \ni \mathbb{j}$ に対して不応特性 $\mathbb{b}$ の狭義単調減少性より次の補題が成立する。

補題 2

$\mathbb{j} = (j_0, j_1, \cdots, j_{m-1})$，$\tau = \tau(\mathbb{x}')$ と置く。

$j_{i-1}+1 \leq j < j_{i-1}+|\mathbb{x}'|$ を満たす任意の整数 j に対して

$$\varphi(\rho(\mathbb{x}, j^\tau m+i), \mathbb{b}) < \varphi(\rho(\mathbb{x}, (j+1)^\tau m+i), \mathbb{b})$$

が成立する。ただし $i=0,1,\cdots,m-1$。

（証明は省略）

この補題2は，$\mathbb{x}$ が周期出力のとき各時点における不応特性の影響の大きさの間の関係を述べている。

4. $\widetilde{A}_m \subseteq H_m(\mathbb{b})$

この節では A_m の任意の要素が m 周期入力に対する周期出力になりうることを示す。

0と1よりなる列 $\mathbb{x}=x_{lm-1}x_{lm-2}\cdots x_0$ に対して i に同期した x_{km+i} を末尾に持つ回転 $\rho(\mathbb{x},km+i)$，$k=0,1,\cdots,l-1$ を考える。末尾が1に等しい回転 $\rho(\mathbb{x},km+i)$ のそれぞれに対する不応特性 $\mathbb{b}$ のもとでの φ の値の最大値を $l_{i,m}(\mathbb{x},\mathbb{b})$ と表わし，末尾が0に等しい回転 $\rho(\mathbb{x},km+i)$ のそれぞれに対する $\mathbb{b}$ のもとでの φ の値の最小値を $u_{i,m}(\mathbb{x},\mathbb{b})$ と表わす。つまり次のように定義する。$i=0,1,\cdots,m-1$ とする。

$$l_{i,m}(\mathbb{x},\mathbb{b}) \equiv \begin{cases} \displaystyle\max_{\substack{x_{km+i}=1 \\ 0\le k<l}} \varphi(\rho(\mathbb{x},km+i),\mathbb{b}), & x_{km+i}=1 \text{ となる } k \text{ が存在,} \\ -\infty, & x_{km+i}=1 \text{ となる } k \text{ が存在しない,} \end{cases}$$

$$u_{i,m}(\mathbb{x},\mathbb{b}) \equiv \begin{cases} \displaystyle\min_{\substack{x_{km+i}=0 \\ 0\le k<l}} \varphi(\rho(\mathbb{x},km+i),\mathbb{b}), & x_{km+i}=0 \text{ となる } k \text{ が存在,} \\ +\infty, & x_{km+i}=0 \text{ となる } k \text{ が存在しない} \end{cases}$$

補題1,2およびξの定義よりA_mの要素$x=\xi(x',\mathbf{j})$に対して$l_{i,m}$, $u_{i,m}$はそれぞれ次のように表わされる。

$l=|x'|$, $\mathbf{j}=(j_0, j_1, \cdots, j_{m-1})$, $\tau=\tau(x')$とする。

$$l_{i,m}(x,\mathbb{b})=\begin{cases}\varphi(\rho(x, j_i\tau m+i), \mathbb{b}) & , j_i > j_{i-1} \\ -\infty & , j_i = j_{i-1}\end{cases}$$

$$u_{i,m}(x,\mathbb{b})=\begin{cases}\varphi(\rho(x, (j_i+1)\tau m+i), \mathbb{b}) & , j_i < j_{i-1}+l \\ +\infty & , j_i = j_{i-1}+l\end{cases}$$

$i=0, 1, \cdots, m-1$

再び補題2より

$$l_{i,m}(x,\mathbb{b}) < u_{i,m}(x,\mathbb{b}) \quad i=0, 1, \cdots, m-1$$

が成立する。そこでm入力ベクトル$\mathbb{a}=(a_0, a_1, \cdots, a_{m-1})$が,

$$l_{i,m}(x,\mathbb{b}) \leq a_i < u_{i,m}(x,\mathbb{b}) \quad i=0, 1, \cdots, m-1$$

を満たすように定めることができる。初期状態としてxの周期列を仮定する。つまり$x=x_{lm-1}x_{lm-2}\cdots x_0$とするとき,

$I=\{x(-1), x(-2), \cdots\}$を

$$x(t)=x_i \ , \ t\equiv i \ (\mathrm{mod}\ lm) \ , \ t=-1, -2, \cdots$$

と定義する。このとき任意のtに対して

$$x(t)=x_i \ , \ t\equiv i \ (\mathrm{mod}\ lm) \qquad \cdots (1)$$

が成立することを示そう。t_0以下のtに対して(1)が成立していると仮定する。

$$t_0+1 = T\ell m + km + i, \quad 0 \leq k < \ell, \quad 0 \leq i < m$$

となる T，k および i が存在する。モデルの定義と帰納法の仮定より

$$x(t_0+1) = \mathbb{1}[a_i - \varphi(\rho(\mathbb{x}, km+i), \mathbb{b})]$$

が成立している。$x_{km+i} = 1$ とすると，$l_{i,m}$ の定義より

$$\varphi(\rho(\mathbb{x}, km+i), \mathbb{b}) \leq l_{i,m}(\mathbb{x}, \mathbb{b}) \leq a_i$$

が成立し，$x(t_0+1) = 1$ である。同様に，$x_{km+i} = 0$ とすると，$u_{i,m}$ の定義より

$$\varphi(\rho(\mathbb{x}, km+i), \mathbb{b}) \geq u_{i,m}(\mathbb{x}, \mathbb{b}) > a_i$$

が成立し，$x(t_0+1) = 0$ となり (1) が成立する。ゆえに A_m の要素 $\mathbb{x}$ は m 入力ベクトル $\mathbb{a}$ および初期状態 I に対する周期出力 $p(\mathbb{a}, I, \mathbb{b})$ と一致する。次の定理が得られた。

定理 1

任意の不応特性 $\mathbb{b}$ に対して

$$A_m \ni \mathbb{x} \text{ ならば } H_m(\mathbb{b}) \ni \tilde{\mathbb{x}}。$$

5. $H_m(\mathbb{b}) \subseteq \tilde{A}_m$

前節の逆を示そう。0 と 1 よりなる列 $\mathbb{x} = x_{\ell m-1} x_{\ell m-2} \cdots x_0$ が

$$\tilde{A}_m \not\ni \tilde{\mathbb{x}} \quad \text{つまり} \quad A_m \not\ni \rho(\mathbb{x}, km),\ k = 0, 1, \cdots, \ell-1$$

を満たすとき，任意の不応特性 $\mathbb{b}$ に対して $H_m(\mathbb{b}) \not\ni \tilde{\mathbb{x}}$ が

成立することを示す。

補題3

$\tilde{A}_m \ni \tilde{x}$ ならば，2つの m に関して同期した部分列 $1\alpha 1$，$0\alpha 0$ を共に含む。つまりある k_1，k_2 と i が存在して，

$$\rho(x, k_1 m+i) = 1\alpha 1\beta$$
$$\rho(x, k_2 m+i) = 0\alpha 0\gamma$$

ただし α, β, γ は 0，1 よりなる列．$|\beta| = |\gamma|$

が成立する。

（証明は省略）

0と1よりなる列 $z = z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_0$，$z' = z'_{n-1} z'_{n-2} \cdots z'_0$ に対して，$z_i \cdots z_0$ 中の1の数から $z'_i \cdots z'_0$ 中の1の数を引いた数を $f(i, z, z')$ と表わし，i に関する最大値，最小値をそれぞれ $f_{max}(z, z')$，$f_{min}(z, z')$ と表わす．つまり次のように定義する。

$$f(i, z, z') \equiv \sum_{j=0}^{i} (z_j - z'_j)$$
$$f_{max}(z, z') \equiv \max_{0 \le i < n} f(i, z, z')$$
$$f_{min}(z, z') \equiv \min_{0 \le i < n} f(i, z, z')$$

この f，f_{max}，f_{min} に関して次の補題が成立する。

補題4

$z = z_{n-1} z_{n-2} \cdots z_0$，$z' = z'_{n-1} z'_{n-2} \cdots z'_0$，$\|z\| = \|z'\|$ が

$f_{max}(z, z') - f_{min}(z, z') \ge 2$

を満たし，$f(i,\mathbb{z},\mathbb{z}')=f_{max}(\mathbb{z},\mathbb{z}')$ となる i の数より，$f(i,\mathbb{z},\mathbb{z}')<f_{max}(\mathbb{z},\mathbb{z}')-1$ となる i の数が少なくないならば，ある i_0 が存在して，

(i) $z_{i_0}=1$ ， $z'_{i_0}=0$

(ii) 任意の不応特性 $\mathbb{b}$ に対して，

$$\varphi(\rho(\mathbb{z},i_0),\mathbb{b}) > \varphi(\rho(\mathbb{z}',i_0),\mathbb{b})$$

が成立する。

（証明は省略）

補題3より $\widehat{A_m} \ni \widehat{\mathbb{x}}$ ならば，ある k, k' が存在して，$\mathbb{z}=\rho(\mathbb{x},km)$ ，$\mathbb{z}'=\rho(\mathbb{x},k'm)$ と置くとき，補題4の条件を満足する。したがって補題4より，ある i_0 が存在して

(i) $z_{i_0}=1$ ，$z'_{i_0}=0$

(ii) $\varphi(\rho(\mathbb{z},i_0),\mathbb{b}) > \varphi(\rho(\mathbb{z}',i_0),\mathbb{b})$

が成立する。ゆえに $l_{i,m}$ ，$u_{i,m}$ の定義より

$$l_{i_0,m}(\mathbb{x},\mathbb{b}) > u_{i_0,m}(\mathbb{x},\mathbb{b}) \qquad \cdots \quad (2)$$

が成立する。

補題5

ある不応特性 $\mathbb{b}$ が存在して $\widehat{\mathbb{x}}$ が $H_m(\mathbb{b})$ の要素であると仮定する。つまり m 入力ベクトル $\mathbb{a}=(a_0,a_1,\cdots,a_{m-1})$ と初期状態 I が存在して $\widehat{\mathbb{x}}=\widehat{\rho}(\mathbb{a},I,\mathbb{b})$ が成立していると仮定する。このとき

$$l_{i,m}(\mathbb{x},\mathbb{b}) \le a_i \le u_{i,m}(\mathbb{x},\mathbb{b}) \quad , \quad i=0,1,\cdots,m-1$$

が成立することが必要である。

（証明は省略）

$\tilde{A}_m \ni \tilde{\mathbb{x}}$ ならば(2)とこの補題5より，任意の$\mathbb{b}$に対して $H_m(\mathbb{b}) \ni \tilde{\mathbb{x}}$ が成立する。次の定理が得られた。

定理2

$$H_m(\mathbb{b}) \ni \tilde{\mathbb{x}} \quad \text{ならば} \quad \tilde{A}_m \ni \tilde{\mathbb{x}}$$

定理1と定理2より不応特性$\mathbb{b}$に依らずに

$$H_m(\mathbb{b}) = \tilde{A}_m$$

が成立することがわかった。つまり周期mの入力に対するすべての周期出力を構成的に記述できたことになる。

6. 入力空間の構造

0と1よりなる列 $\mathbb{x} = x_{lm-1}x_{lm-2}\cdots x_0$ を周期出力とするようなm入力ベクトル全体を考える。これを$\mathbb{x}$の入力空間と呼び，次のように定義する。

$$R_m(\mathbb{x},\mathbb{b}) \equiv \{ \mathbb{a} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbb{x} = \mathbb{p}(\mathbb{a}, {}^{\exists}I, \mathbb{b}) \}$$

またm次元実数空間に測度μを次のように導入する。

$0 \le a < b < 1$ を満たす任意の a, b に対して，

$$\mu([a,b)) \equiv b-a \quad , \quad \mu([a,+\infty)) \equiv 1-a$$

$$\mu((-\infty, b)) \equiv b + \mathbb{0}, \quad \mu((-\infty, +\infty)) \equiv \mathbb{1} + \mathbb{0}$$

と定義する。ただし $\mathbb{0}, \mathbb{1}$ はそれぞれ $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$ の測度を表わす記号である。この μ を m 次元に拡張し，m 次元実数空間の測度とする。

この節では，不応特性の条件 $\sum_{r=1}^{\infty} b_r < \infty$ を強めて，$\sum_{r=1}^{\infty} b_r = 1$ と仮定する。これは m 入力ベクトル $\mathbb{a}$ の尺度を変更するだけで本質的な影響を与えない。この仮定のもとで，すべての周期出力の入力空間の測度

$$\mu\left(\bigcup_{A_m \ni x} R_m(x, \mathbb{b})\right)$$

を調べる。入力空間の重なりについて次の補題が成立する。

補題6

1の頻度の異なる周期出力 x，x' の入力空間 $R_m(x, \mathbb{b})$，$R_m(x', \mathbb{b})$ は共通部分を持たない。

（証明は省略）

この補題6より次の系1，2が得られる。

系1

A_1 の相異なる要素 x，x' の入力空間 $R_1(x, \mathbb{b})$，$R_1(x', \mathbb{b})$ は共通部分を持たない。

系2

A_1 の相異なる要素 x，x' から生成される A_m の要素

$\mathbb{y} \equiv \xi(\mathbb{x}, \mathbb{j})$, $\mathbb{j} \in J_m(\mathbb{x})$, $\mathbb{y}' \equiv \xi(\mathbb{x}', \mathbb{j}')$, $\mathbb{j}' \in J_m(\mathbb{x}')$

に対して,

$R_m(\mathbb{y}, \mathbb{b})$, $R_m(\mathbb{y}', \mathbb{b})$ は共通部分を持たない。

0と1よりなるベクトルの集合 E_m を次のように定義する。

$$E_m \equiv \{\mathbb{e} = (e_0, e_1, \cdots, e_{m-1}) \mid e_i = 0, 1 \ , i = 0, 1, \cdots, m-2, \ e_{m-1} = 0\}$$

E_m に順序関係 $\leq$ を次のように導入する。$\mathbb{e} = (e_0, e_1, \cdots, e_{m-1})$ $\mathbb{e}' = (e_0', e_1', \cdots, e_{m-1}')$ とするとき,

$$\mathbb{e} \leq \mathbb{e}' \Leftrightarrow \quad e_i \leq e_i' \ , \ i = 0, 1, \cdots, m-1$$

$$\mathbb{e} < \mathbb{e}' \Leftrightarrow \quad \mathbb{e} \leq \mathbb{e}' \ \text{かつ} \ \mathbb{e} \neq \mathbb{e}'$$

と定義する。

入力空間が重さなる場合について次の補題が成立する。

補題 7

$A_1 \ni \mathbb{x}$, $J_m(\mathbb{x}) \ni \mathbb{j}, \mathbb{j}'$ に対して $\mathbb{y} = \xi(\mathbb{x}, \mathbb{j})$, $\mathbb{y}' = \xi(\mathbb{x}, \mathbb{j}')$ と置くとき,

$$R_m(\mathbb{y}, \mathbb{b}) \cap R_m(\mathbb{y}', \mathbb{b}) \neq \phi$$

となるための必要十分条件は

$$\mathbb{j} - \mathbb{j}' \in E_m \quad \text{または} \quad \mathbb{j}' - \mathbb{j} \in E_m$$

が成立することである。

(証明は省略)

以上の系と補題より周期出力 A_m の入力空間の測度は次の

ように表わされる。

補題8

$$\mu\Bigl(\bigcup_{A_m \ni x} R_m(x, b)\Bigr)$$

$$= \sum_{\substack{A_1 \ni x \\ x \neq 1}} \sum_{J_m(x) \ni j} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{E_m(k, j, x) \ni e} \mu\Bigl(\bigcap_{l=1}^{k} R_m(\xi(x, j+e_l), b)\Bigr)$$

ただし

$$E_m(k, j, x) \equiv \{e = (e_1, e_2, \cdots, e_k) \mid e_i \in E_m,$$
$$j + e_i \in J_m(x),\ i = 1, 2, \cdots, k,$$
$$e_1 < e_2 < \cdots < e_k\}$$

(証明は省略)

補題8を用いて $m = 1, 2, 3$ に対して計算すると次の定理が成立することが示される。

定理3

$m = 1, 2, 3$ に対して

$$\mu\Bigl(\bigcup_{A_m \ni x} R_m(x, b)\Bigr) = \mu(R^m)$$

(証明は省略)

この定理3は，ある m 入力ベクトル a に対して出力が周期的になることがないとき，a は測度 μ に関する零集合に入っていることを示している。

周期出力 x が得られるような m 入力ベクトル a を考える。

このとき，ある初期状態Ｉが存在して，$x = p(a, I, b)$ が成立しているが，他の初期状態 I' に対して出力が周期的にならない可能性がある。（周期的に必ずなるという証明は，不応特性が指数的に減少する場合に対してできているが，狭義単調減少かつ下に凸の場合に対してはまだできていない。）また x と異なる周期出力になることもある。しかし，出力頻度は同一になることが示される。

補題９

$R_m(x, b) \ni a$ とする。入力 a，初期状態 I' のときの出力を $x'(t)$ と書くとき，出力頻度

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T} x'(t)$$

は $\|x\| / |x|$ と一致する

（証明は省略）

この補題９と定理３より，入力と出力頻度との関係が一般化された Cantor 関数で表わされることが示された。

定理４

$m = 1, 2$ および３のとき，m 周期入力と出力頻度との関係が一般化された Cantor 関数で表わされる。

7. むすび

神経細胞の数学モデルに周期入力を加えた場合の周期出力全体を構成的に記述した。また入力の周期が1，2および3のとき，入力と出力頻度の関係が一般化されたCantor関数で表わされることを示した。

$R_m(\mathbb{X}, \mathbb{b}) \ni \mathbb{a}$ のとき任意の初期状態に対して出力が周期的になることが示されるならば，定理3より"ほとんどあらゆる入力に対して周期出力が得られる"ことが示せる。この命題に対する証明と定理3の m が4以上の場合に対する証明が残された問題である。

謝辞

本研究を進めるにあたり，御助言を下さった東大工学部南雲仁一教授ならびに同研究室の皆様に深く感謝致します。

参考文献

(1) L.D. Harmon : "Studies with artficial neurons, I: Properties and functions of an artficial neuron", Kybernetik, vol. 1, No. 3, pp. 89-101, Dec. 1961.

(2) J. Nagumo and S. Sato : "On a Response Characteristic

of a Mathematical Neuron Model", Kybernetik, vol.10, No.3, pp.155−164, Mar. 1972.

(3) 南雲仁一："非線形差分方程式の解から作られる或る関数の性質 ― 非自立系 ―"，信学会非線形問題研究会資料 NPL 72−10,（1972−08）

(4) S. Sato, M. Hatta and J. Nagumo："Response Characteristics of a Neuron Model to a Periodic Input", Kybernetik, vol.16, pp.1−8 (1974)

(5) 増田正，南雲仁一："カントル型応答特性をもつ神経細胞モデル"，信学会非線形問題研究会資料 NPL 76−15，(1977−03)

(6) 永見，北橋，田中，阿江，吉田："しきい素子フィードバック形シフトレジスタのオートノマス動作について" 信学論（A），58-A，8，p.530（昭50−08）

(7) 永見，北橋，田中："フィードバック　フトレジスタ形しきい素子回路網により生成される周期系列"，信学論（D），59−D，5，p.307（昭51−05）

(8) 吉田利信，南雲仁一："神経モデルの周期入力に対する応答"，信学会非線形問題研究会資料 NPL 75−18 (1976−2)

(9) 吉田利信，南雲仁一："神経モデルの周期入力に対する応答(続)"，信学会非線形問題研究会資料 NPL 76-4 (1976-9)

(10) 吉田利信："神経モデルの性質 ―2及び3周期入力に対する入力空間の構造―"，信学会非線形問題研究会資料 NPL 76-14 (1977-1)

(11) 吉田利信："神経モデルの周期入力に対する応答"，信学会非線形問題研究会資料 NPL 77-11 (1977-8)