数理解析研究所講究録
318巻 1978年 41-49

Teichmüller空間論への函数環の応用

東理大・理　　宮原 靖

最近，Riemann面のmoduliの理論に函数環や微分空間の理論を応用する試みがなされている（Rochberg, Marden, Minda etc.）。例えば，Rochbergの方法は次の通りである.

$\mathcal{S}$をコンパクトな境界付Riemann面の全体から成る集合とする．$\bar{S}\in\mathcal{S}$に対し，その内部をS，境界を∂Sで表す．$\bar{S}$の種数をp，境界成分の個数をqとし，$N=2p+q-1$とおく．Sにおいて解析的，かつ$\bar{S}$において連続な函数の全体を$A(S)$で表すとき，これは一様ノルムにより Banach環をなす．$\bar{S}$, $\bar{S}'\in\mathcal{S}$に対して，$A(S)$から$A(S')$の上への連続な1対1線型写像の全体を$L(A(S), A(S'))$で表す．$\bar{S}$と$\bar{S}'$が同位相ならば，$L(A(S), A(S'))\neq\phi$なることが知られている．$T\in L(A(S), A(S'))$に対して

$$c(T)=\|T\|\|T^{-1}\|$$

とおく．つねに $C(T) \geqq 1$ が成立つ．また，$T/\|T\|$ が等長写像であるのは $C(T)=1$ なるときに限る．

$z \in S$，$z' \in S'$ に対し，ある $\varepsilon > 0$ 及びある $T \in L(A(S), A(S'))$ があって，すべての $f \in A(S)$ に対して

$$|f(z) - (Tf)(z')| \leqq \varepsilon \min(\|f\|, \|Tf\|)$$

が成立つとき，z と z' は T に関して ε-related であるという．

$\bar{S}, \bar{S}' \in \mathcal{S}$ に対して

$$d(\bar{S}, \bar{S}') = \inf\{\log C(T) \mid T \in L(A(S), A(S'))\}$$

とおくとき，これは $\bar{S}$ と $\bar{S}'$ の間の距離を与える．（正確には S と S' の等角同値類の間の距離である．）距離の公理をみたすことの証明は次のもの以外は容易である．

$$d(\bar{S}, \bar{S}') = 0 \Rightarrow S \text{ と } S' \text{ は等角同値である．}$$

これは次のように言い換えられる．

定理1．$\bar{S}, \bar{S}' \in \mathcal{S}$ に対して

$$\inf\{C(T) \mid T \in L(A(S), A(S'))\} = 1$$

ならば，S と S' は等角同値である．

これは Rochberg によりなされたが（[1]），その証明は間接的なものであった．S と S' の間の等角写像を具体的に構成することにより，これを直接に証明することも可能である．その方法は後で述べる定理3の証明においても用いられるので，ここでは述べない．また，この結果自体，函数環の問題

としても興味深い．更に，Rochberg は次の結果を証明した（[1]，[2]）．

定理2．　$\bar{S}\in\mathcal{S}$ の Riemann 空間において，距離 $d(\cdot,\cdot)$ の定める位相は Teichmüller 距離の定める位相と同値である．

このように，$c(T)$ が 1 に近いような $T\in L(A(S),A(S'))$ が存在すれば，S と S' は等角同値に近い状態にあると考えられるが，これに関連して次の結果が示される．これは，自己同型 $T\in L(A(S),A(S))$ について，$c(T)$ が 1 に十分近いときは，T は S の１つの自己等角写像により引起こされる $A(S)$ の自己同型に近いということを示している．

定理3．　$\bar{S}\in\mathcal{S}$ に対して，$N=2p+q-1\geqq 2$ とする．十分小さな任意の $\varepsilon>0$ 及び S の任意の相対コンパクトな部分領域 D に対して，次の条件をみたす定数 $d>1$ が存在する．$T1=1$ かつ $c(T)<d$ なる任意の $T\in L(A(S),A(S))$ に対して S の自己等角写像 w が唯一つ定まり，すべての $z\in D$ につき，z と $w(z)$ は T に関して ε-related である．

この結果を証明するために少し準備をしておく．$\bar{S}\in\mathcal{S}$ とする．$\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_p,\beta_p$ はそれぞれ S 上の単純閉曲線

!!

であって，これらは homologically independent modulo ∂S であるとする．しかも，$i \neq j$ のとき

$$\alpha_i \cap \alpha_j = \phi, \quad \beta_i \cap \beta_j = \phi, \quad \alpha_i \cap \beta_j = \phi,$$

かつ α_i と β_i は唯一点で交わるものとする．S を $\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_p, \beta_p$ に沿って切ることにより得られる領域を S_0 とする．即ち，$S_0 = S - \bigcup_{j=1}^{p} (\alpha_j \cup \beta_j)$．$S_0$ にすべての α_j, β_j の上の点の定める境界要素をすべて付加した集合を S_0^* で表す．S_0^* には自然な位相が定められる．次に，D を S の相対コンパクトな部分領域とするとき，$\bar{D} - \bigcup_{j=1}^{p} (\alpha_j \cup \beta_j)$ に $\bar{D} \cap \{\bigcup_{j=1}^{p} (\alpha_j \cup \beta_j)\}$ の点が定める境界要素をすべて付加して得られる集合を D^* で表す．D^* は S_0^* の部分集合である．

定理2を証明するために，次の Lemma が必要である．

Lemma. $\bar{S} \in \mathcal{S}$，D を S の任意の相対コンパクトな部分領域とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，次の条件をみたす $d > 1$ が存在する．$\bar{S}' \in \mathcal{S}$ とするとき，$T1 = 1$ かつ $c(T) < d$ なる $T \in L(A(S), A(S'))$ が存在するならば，D^* から S' の中への連続写像 w_T が存在して，すべての $s \in D^*$ につき，s と $w_T(s)$ は T に関して ε-related である．

証明は省略する．

さて，定理2を証明しよう．$N \geq 2$ だから S の自己等角写像は有限個しか存在しない．それを $w_1, \cdots, w_M$ とする．

任意の$\varepsilon > 0$及びSの任意の相対コンパクトな部分領域Dを与える．このとき$d > 1$があって，$T1 = 1$かつ$c(T) < d$なる任意の$T \in L(A(S), A(S))$に対して，あるj（$1 \leqq j \leqq M$）が対応して，すべての$z \in D$及びすべての$f \in A(S)$につき

$$|f(z) - (Tf)(w_j(z))| \leqq \varepsilon \min(\|f\|, \|Tf\|)$$

を示せばよい．これが成立たないと仮定すると，ある$\varepsilon > 0$及びある相対コンパクトな部分領域Dに対して，$d_n \to 1$なる列$\{d_n\}$があって次の性質をみたす．各nにつき，$T_n 1 = 1$かつ$c(T_n) < d_n$なる$T_n \in L(A(S), A(S))$が存在して，各j（$1 \leqq j \leqq M$）に対しある$f_{jn} \in A(S)$及びある$z_{jn} \in D$が

(1) $$|f_{jn}(z_{jn}) - (T_n f_{jn})(w_j(z_{jn}))| > \varepsilon \|f_{jn}\|$$

または

(2) $$|f_{jn}(z_{jn}) - (T_n f_{jn})(w_j(z_{jn}))| > \varepsilon \|T_n f_{jn}\|$$

をみたす．

今，$\{S_n\}$をSの近似とし，$\varepsilon_n \to 0$なる正数列$\{\varepsilon_n\}$をとる．Lemmaにおいて$\varepsilon = \varepsilon_n$，$D = S_n$とすることにより$S_n^*$から$S$の中への連続写像$w_{T_n}$が存在して，各点$\zeta \in S_n^*$と$w_{T_n}(\zeta)$は$T_n$に関して$\varepsilon_n$-relatedであるとしてよい．$S_0^*$及び$S$上にそれぞれ適当な距離を導入しておく．このとき，任意のコンパクト集合K（$\subset S_0^*$）に対して番号n_0があって，$\{w_{T_n} \mid n \geqq n_0\}$は$K$上で同程度連続であることが，

集合 $\{w_{T_n}(\zeta) \mid \zeta \in K,\ n=1,2,\cdots\}$ が ∂S から離れていること及び積分表示式を用いて証明される。従って $\{w_{T_n}\}$ は S_0^* 上の正規族である。そこで，部分列を選んで番号をつけ変えることにより，ある連続写像 $w: S_0^* \to S$ に対して，S_0^* の任意のコンパクト部分集合において一様に $\lim_{n\to\infty} w_{T_n} = w$ としてよい。各点 $\zeta \in S_n^*$ と $w_{T_n}(\zeta)$ が ε_n-related であることを用いて，この写像 w が S の自己等角写像であることが証明される。即ち，ある j $(1 \leqq j \leqq M)$ に対して $w = w_j$ となる。従って，この j に対し，

(3) $\quad \lim_{n\to\infty} w_{T_n} = w_j$ *uniformly on every compact subset of* S_0^*.

この j について，(1) または (2) のいずれかがすべての n に対して成立つと仮定してもよい。また，ある $z_0 \in \overline{D}$ に対し，$z_{jn} \to z_0$ $(n \to \infty)$ としてよい。更に，$f_{jn}/\|f_{jn}\|$ 及び $(T_n f_{jn})/\|f_{jn}\|$ の一様有界性より，S 上で広義の一様に

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{jn}}{\|f_{jn}\|} = f_0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{T_n f_{jn}}{\|f_{jn}\|} = g_0$$

としてもよい。ここに，f_0, g_0 は S 上のある解析函数である。

さて，(1) がすべての n に対して成立っているとすれば，

$$\left| \frac{f_{jn}(z_{jn})}{\|f_{jn}\|} - \frac{(T_n f_{jn})(w_j(z_{jn}))}{\|f_{jn}\|} \right| > \varepsilon .$$

$n \to \infty$ として次の不等式を得る；

(4) $$|f_0(z_0) - g_0(w_j(z_0))| \geqq \varepsilon .$$

一方，Lemma により，n が十分大きいならば，

$$|f_{jn}(z_{jn}) - (T_n f_{jn})(w_{T_n}(z_{jn}))| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \|f_{jn}\| .$$

従って (3) により

$$|f_0(z_0) - g_0(w_j(z_0))| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

を得る．これは(4)に矛盾する．

(2)がすべての n に対して成立っているときも，同様に矛盾を生ずる．

これで条件をみたす自己等角写像 w の存在が示された．

最後に w の一意性を証明する．一意性が成立たないと仮定すると，$\varepsilon_n \to 0$ なる正数列 $\{\varepsilon_n\}$ 及び $T_n 1 = 1$ かつ $c(T_n) \to 1$ なる $T_n \in L(A(S), A(S))$ が存在して，ある j, k について ($j \neq k$)，すべての $z \in D$ 及びすべての $f \in A(S)$ に対し，

(5) $$\begin{cases} |f(z) - (T_n f)(w_j(z))| \leqq \varepsilon_n \min(\|f\|, \|T_n f\|), \\ |f(z) - (T_n f)(w_k(z))| \leqq \varepsilon_n \min(\|f\|, \|T_n f\|) \end{cases}$$

が成立つ．そこで，$w_j(z_1) \neq w_k(z_1)$ なる $z_1 \in D$ をとると，(5) により，すべての $f \in A(S)$ に対して

$$\begin{aligned} &|f(w_j(z_1)) - f(w_k(z_1))| \\ &\leqq |f(w_j(z_1)) - (T_n^{-1} f)(z_1)| + |f(w_k(z_1)) - (T_n^{-1} f)(z_1)| \end{aligned}$$

$$\leqq 2\varepsilon_n \|f\|.$$

$n \to \infty$ とすれば，すべての $f \in A(S)$ に対して

$$f(w_j(z_1)) = f(w_k(z_1))$$

となる．$A(S)$ は点を分離するから，これは矛盾である．かくして一意性が示された．（証明終）

定理3の応用として，f と Tf の零点の間の関係を示す次の結果が得られる．

定理4．$S \in \mathcal{S}$ に対して，$N = 2p + g - 1 \geqq 2$ とする．$f_0 \in A(S)$ を任意とする．十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ 及び $f_0 \neq 0$ on $\mathrm{Bd}\,D$ のような S の任意の相対コンパクト部分領域 D に対して次の性質をみたす定数 $d > 1$ が存在する：

$T \in L(A(S), A(S))$ が $T1 = 1$ 及び $c(T) < d$ をみたすならば，f_0 の D における零点の個数は Tf_0 の $w(D)$ における零点の個数に等しい．ここで，w は定理3により一意に定まる S の自己等角写像である．更に，$w(D)$ における Tf_0 の零点の集合 $N_{Tf_0}(w(D))$ から D における f_0 の零点の集合 $N_{f_0}(D)$ の上への写像 θ があって，すべての $\zeta \in N_{Tf_0}(w(D))$ に対して，$\theta(\zeta)$ と ζ は T に関して ε-related である．しかもこのような写像 θ は唯一つしかない．

参　考　文　献

[1] R. Rochberg, Almost isometries of Banach spaces and moduli of Riemann surfaces, Duke Math. J., 40 (1973), 41–52.

[2] R. Rochberg, Almost isometries of Banach spaces and moduli of Riemann surfaces II, Ibid., 42 (1975), 167–182.