数理解析研究所講究録
319巻 1978年 84-99

Equivariant S-duality

阪市大理　　村山光孝

Gを有限群とするとき，G-equivariant stable homotopyに対して，Spanier[12]と同様の議論ができ，それによってG-homologyとG-cohomologyの間のdualityについて論じることを目的とする。

§1では，その準備として，unstable G-homotopyの性質，特にBlakers-Masseyの定理，suspension同型について調べる。§2では，Equivariant S-dualityについて，[12]，[1]に従って論じる。

§1 G-homotopy groups

Gをcompact Lie groupとする。G-CW complex([9])は同変写像に対して，CW-complexと同様の構成が可能である。例えば，G-H.E.Pをもち，G-胞体近似，J.H.C Whiteheadの定理，等が成立する。(c.f. [9])　さらに次の命題が成り立つ。

以下簡略化の為に G-space で pointed G-space を表わし，G-map は基点を保つものとする。又 $\mathcal{S}(G)$ は G の閉部分群全体からなる集合，とする。

命題 1.1　X を G-space，(K, L) を G-CW complex pair とする。$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し $X^H = \{x \in X \mid gx = x,\ g \in H\}$ は n_H-connected，かつ $\dim_G(K^H - L^H) \leqq n_H + 1$，$n_H \geqq -1$ ならば，任意の G-map $f: L \to X$ は K 上に (G-map として) 拡張可能である。

[証明]　K の s-skelton K^s に f が帰納的に拡張されることを示す。K^{s-1} まで拡張されたと仮定する。$e^s \subset K - L$ を s-cell で isotropy subgroup が H であるものとすれば，$s \leqq n_H + 1$，$f(\partial e^s) \subset X^H$ であるから，f は e^s に，$f(e^s) \subset X^H$ をみたすように拡張できる。これを G-action で拡張すれば，f は $K^{s-1} \cup Ge^s$ 上に G-map として拡張される。これを続ければよい。　(終)

命題 1.2　(X, A) を G-space pair，(K, L) を G-CW complex pair とする。$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，(X^H, A^H) は n_H-connected，かつ $\dim_G(K^H - L^H) \leqq n_H$，$n_H \geqq 0$ ならば，任意の (pair の) G-map $f: (K, L) \to (X, A)$ は，A への G-map に G-homotopic relative A，である。

証明は 1.1 と同様にすればよい。

写像の n-equivalence の定義は [13] p404 を参照する。上の命題により，[13] Theorem 7.6.22，[8] 4章，定理 2.15 と同様にして

次の命題を得る。

<u>命題 1.3</u>　X、Y を G-space，$f: X \to Y$ を G-map とする。$f^H = f|_{X^H}: X^H \to Y^H$ が n_H-equivalence, $n_H \geq 0$, $\forall H \in \mathscr{A}(G)$ ならば，G-CW complex K に対して，

$$f_*: [K, X]^G \to [K, Y]^G$$

は，すべての $H \in \mathscr{A}(G)$ に対して，$\dim_G K^H < n_H$ のとき同型，$\dim_G K^H \leq n_H$ のとき全射，である。

この relative form として次を得る。

<u>命題 1.4</u>　(X, A), (Y, B) を G-space pair で $\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対し (X^H, A^H), (Y^H, B^H) は 1-connected とする。$f: (X, A) \to (Y, B)$ は G-map で，$\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対し

$$f_*^H: \pi_i(X^H) \to \pi_i(Y^H)$$

は $i < n_H$ のとき同型，$i = n_H$ のとき全射，であるものとする。このとき，G-CW complex K に対して

$$f_*: [CK, K; X, A]^G \to [CK, K; Y, B]^G$$

は，$\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対して，$\dim_G K^H + 1 < n_H$ のとき同型，$\dim_G K^H + 1 \leq n_H$ のとき全射である。（ここで CK は K の cone。）

上の命題と Blakers-Massey [5] を組み合わせて次の命題を得る。

<u>命題 1.5</u>　(X, A) は次をみたす G-space pair とする。A は X の closed G-subspace 。$\forall H \in \mathscr{A}(G)$ に対して，

(i) (X^H, A^H) は m_H-connected, $m_H \geq 1$, (ii) A^H は n_H-connected, $n_H \geq 1$

$i : (X, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$, $i' : (CA, A) \hookrightarrow (X \cup CA, CA)$ を

inclusion とするとき, G-CW complex K に対し

$i_* : [CK, K ; X, A]^G \longrightarrow [CK, K ; X \cup CA, CA]^G$,

$i'_* : [CK, K ; CA, A]^G \longrightarrow [CK, K ; X \cup CA, CA]^G$

は $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して, $\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H$ のとき同型,

$\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H + 1$ のとき全射, である。

G-CW complex pair (X, A) は G-HEP をもつので $X \cup CA \underset{G}{\simeq} X/A$

が成り立つ。従って上の命題を次の様に書き直せる。

<u>定理 1.6</u>　(X, A) は G-CW complex pair で, $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対し

(i) (X^H, A^H) は m_H-connected, $m_H \geq 1$, (ii) A^H は n_H-connected, $n_H \geq 1$,

とする。このとき G-CW complex K に対して

$p_* : [CK, K ; X, A]^G \longrightarrow [\Sigma K, X/A]^G$

は $\forall H \in \mathcal{A}(G)$ に対して, $\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H$ のとき同型,

$\dim_G K^H + 1 \leqq m_H + n_H + 1$ のとき全射である。

G を有限群とするとき, G-CW complex は G-complex (Bredon[6])

になる。G-spectrum $\mathbb{E} = \{E_n, \varepsilon_n, n \in \mathbb{Z}\}$ を次の様に定義する。(C,H[1])

ω を, 同値でない既約 G-module を 1 つずつ含む G-module と

する。E_n は G-complex の G-homotopy type をもつ G-space とし,

$\varepsilon_n : \Sigma^\omega E_n \to E_{n+1}$ を G-map とする。ここで Σ^ω は ω の 1点 compact

化である。smooth G-manifold は G-CW complex structure をもつ

（G が compact Lie group のとき，[10]）ので，Σ^W は G-CW complex structure を（従って G-complex structure を）もつ。

G-spectrum $\mathbb{E}$，G-space X, Y，$\alpha = \bar{V} - \bar{W} \in RO(G)$，$\bar{V}, \bar{W}$ G-module に対し $[X, \mathbb{E}\wedge Y]^G$ を

$$[X, \mathbb{E}\wedge Y]^G = \varinjlim_n [\Sigma^{nW+\bar{V}}X, E_n\Sigma^{\bar{W}}\wedge Y]^G$$

（$\Sigma^{\bar{V}}X = \Sigma^{\bar{V}}\wedge X$，$E_n\Sigma^{\bar{W}} = E_n\wedge\Sigma^{\bar{W}}$）と定義する。$X$ を fixed finite G-complex とするとき，上の定理が適用できて，$[X, \mathbb{E}\wedge(\ )]^G_\alpha$ は G-complex の category 上の half exact functor であることが示される。

次に写像空間 $F(X, Y)$ について論じる。G-space X, Y に対して $F(X, Y)$ は，G-action を，$g(f)(x) = gf(g^{-1}x)$ で定義して G-space になる。このとき，$F(X, Y)^G$ は G-map 全体になる。特に，$F(X^G, Y)^G = F(X^G, Y^G)$ となる。X Y を locally compact G-space，X, Z を G-space とすると，

$$[X\wedge Y, Z]^G \cong [X, F(Y, Z)]^G$$

が成立する。このとき次が成り立つ。

<u>補題 1.7</u>　X を locally compact G-CW complex，Y を G-space とする。r；$F(X, Y)^G \longrightarrow F(X^G, Y)^G = F(X^G, Y^G)$ を制限写像とする。$^\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，Y^H は n_H connected，$n_H \geq 0$ とするとき

$$r_*；\pi_j(F(X, Y)^G) \longrightarrow \pi_j(F(X^G, Y^G))$$

は $^\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し，$j \leq N_H$ のとき同型，$j \leq N_H+1$ のとき全射

である。ここで

$$N_H = \begin{cases} n_H - \dim_G (X^H - X^G) & \text{if } X^H \neq X^G \\ \infty & \text{if } X^H = X^G \end{cases}$$

。

[証明] $\pi_j(F(X,Y)^G) = [\Sigma^j, F(X,Y)^G] \cong [\Sigma^j \wedge X, Y]^G$

であるから

$$(1\wedge i)^* : [\Sigma^j\wedge X, Y]^G \longrightarrow [\Sigma^j \wedge X^G, Y]^G$$

を考えればよい。命題1.1を用いて，$1\wedge i$ に対して[8],4章定理2.15と同様な議論を行なえば，この命題を得る。　終

X, Yを G-space とする。G-module V に対し Σ^V-suspension

$$\Sigma^V_* : [X, Y]^G \longrightarrow [\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G$$

を考える。これは adjoint isomorphism

$$[\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G \cong [X, \Omega^V\Sigma^V Y]^G$$

を通して次の写像に移して考えることができる。

$$i_* : [X, Y]^G \longrightarrow [X, \Omega^V\Sigma^V Y]^G$$

ここで $\Omega^V\Sigma^V Y = F(\Sigma^V, \Sigma^V Y)$，$i : Y \hookrightarrow \Omega^V\Sigma^V Y$ は $i(y)(t) = (t, y)$ で定義される inclusion である。Σ^Vは compact G-CW complex と考えられるので，i_*に上の命題を適用して次を得る。

<u>定理 1.8</u>　X は G-CW complex，Y は G-space with non-degenerate base point とする。$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対し Y^H は n_H-connected, $n_H \geq 0$ ならば，

$$\Sigma^V_* : [X, Y]^G \longrightarrow [\Sigma^V X, \Sigma^V Y]^G$$

は，$\forall H \in \mathcal{S}(G)$ に対して，$\dim_G X^H \leq \min\limits_{H' \in \mathcal{S}(H)} N^H_{H'}$ のとき同型，$\dim_G X^H \leq \min\limits_{H' \in \mathcal{S}(H)} N^H_{H'}+1$ のとき全射である。ここで

$$N^H_{H'} = \begin{cases} 2n_H & \text{if } H'=H \text{ かつ } V^H \neq \{0\} \\ n_{H'}-1+\dim V^{H'} - \dim_H(V^{H'}-V^H) & \text{if } V^{H'} \neq V^H \\ \infty & \text{others} \end{cases}$$

注意．$\dim V^{H'}$ は，一般には $\dim_H V^{H'}$ とは異なるが，G が有限群（$\dim G=0$）のときは一致する。（$\dim_G X^H$ は $G\cdot X^H$ の G-CW complex としての次元を表わす。）従って，G が有限群のとき，上の $N^H_{H'}$ で $V^{H'} \neq V^H$ の部分は $(n_{H'}-1)$ と書き直される。

[証明] 次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
\pi_j(Y^H) \arrow[rr, "i^H_*"] \arrow[dr, "i_{H*}"'] & & \pi_j((\Omega^V\Sigma^V Y)^H) \arrow[dl, "r_{H*}"] \\
& \pi_j(\Omega^{V^H}(\Sigma^V Y)^H) &
\end{tikzcd}$$

ここで，i，i_H は inclusion，r_H は restriction である。i_H は suspension theorem により $(2n_H+1)$-equivalence である。特に $V^H=\{0\}$ のときは $\Omega^{V^H}\Sigma^{V^H}Y^H = Y^H$ となるので i_H は ∞-equivalence である。又，r_H は補題 1.7 により $(\min\limits_{H' \in \mathcal{S}(H)} M^H_{H'}+1)$-equivalence である。ここで

$$M^H_{H'} = \begin{cases} n_{H'}+\dim V^{H'} - \dim_H(V^{H'}-V^H) & \text{if } V^{H'} \neq V^H \\ \infty & \text{if } V^{H'} = V^H \end{cases}$$

である。今 i^H_* が単射であるのは i_{H*} が単射のとき，又全射

であるのは i_{H*} が全射かつ γ_{H*} が同型のときである。

これらを組み合わせて i^H が $(\min_{H'\in\mathcal{S}(H)} N^H_{H'}+1)$-equivalence であることがわかる。これに命題1.3を適用すればよい。 終

注意 $^\forall H\in\mathcal{S}(G)$ に対して, $V^H\neq\{0\}$ となる(既約) G-module が存在する。従って G を有限群とするとき, ω はこの様なものをすべて含んでいるので $H'\subsetneqq H$ なる部分群 H, H' に対して $\dim V^{H'}\geqq \dim V^H+1$ となる。$\pi^G_V(X)=[\Sigma^V, X]^G$ とするとき, 上の定理より, $\Sigma^\omega_*: \pi^G_{n\omega}(\Sigma^{n\omega}X)\to\pi^G_{(n+1)\omega}(\Sigma^{(n+1)\omega}X)$ は $n\geqq 2$ のとき同型, $n\geqq 1$ のとき全射である。

§2 Equivariant S-duality

G は有限群とする。α-th stable G-homotopy group を

$$\{X,Y\}^G_\alpha=\varinjlim_n\,[\Sigma^{n\omega+V}X,\Sigma^{n\omega+W}Y]^G$$

と表わす。ここで $\alpha=V-W\in RO(G)$. $\mathcal{CW}^G_*$ を $^\forall H\in\mathcal{S}(G)$ に対して X^H が path-connected である様な (~~finite~~) G-complex X の category とする。$X, X'\in\mathcal{CW}^G_*$ に対し G-map $u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ を, $^\forall H\in\mathcal{S}(G)$ に対し $u^H: X^H\wedge X'^H\to\Sigma^{V^H}$ が duality map であるとき([12]), V-duality G-map と呼ぶ。又このとき X' を X の V-dual と呼ぶ。$u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ に対し, $\bar{u}: X'\wedge X\overset{T}{\cong} X\wedge X'\xrightarrow{u}\Sigma^V$,

$u_{V_1,V_2}: \Sigma^{V_1}X\wedge\Sigma^{V_2}X'\overset{1\wedge T\wedge 1}{\cong}\Sigma^{V_1}\wedge\Sigma^{V_2}\wedge X\wedge X'\xrightarrow{1\wedge u}\Sigma^{V_1+V_2}\Sigma^V=\Sigma^{V_1+V_2+V}$ も又 duality G-map である。

Y を finite G-complex, $u: X\wedge X' \to \Sigma^V$ を duality G-map とする。準同型 $\Gamma_u^\alpha: \{Y, X\}_\alpha^G \to \{Y\wedge X', \Sigma^V\}_\alpha^G$, $\bar\Gamma_u^\alpha: \{Y, X'\}_\alpha^G \to \{X\wedge Y, \Sigma^V\}_\alpha^G$ を次の様に定義する。G-map $f: \Sigma^{n\omega+\bar V} Y \to \Sigma^{n\omega+\bar W} X$ に対し, $\Gamma_u^\alpha\{f\} \in \{Y\wedge X', \Sigma^V\}_\alpha^G$ は,次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{n\omega+\bar V} Y\wedge X' \xrightarrow{f\wedge 1} \Sigma^{n\omega+\bar W} X\wedge X' \xrightarrow{1\wedge u} \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^V,$$ 即ち $\Gamma_u^\alpha\{f\} = \{u_{n\omega+\bar W,0}\circ f\}$

又 G-map $f': \Sigma^{n\omega+\bar V} Y \to \Sigma^{n\omega+\bar W} X'$ に対し $\bar\Gamma_u^\alpha\{f'\}\in\{X\wedge Y,\Sigma^V\}_\alpha^G$ は次の写像の合成で代表される。

$$\Sigma^{n\omega+\bar V} X\wedge Y \overset{T\wedge 1}{\simeq} X\wedge\Sigma^{n\omega+\bar V} Y \xrightarrow{1\wedge f'} X\wedge\Sigma^{n\omega+\bar W} X' \xrightarrow{u_{0,n\omega+\bar W}} \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^V$$

即ち, $\bar\Gamma_u^\alpha\{f'\} = \{u_{0,n\omega+\bar W}\circ(1\wedge f')\circ(T\wedge 1)\}$

<u>定理2.1</u> $u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ を duality G-map とする。このとき finite G-complex Y, $\alpha\in RO(G)$ に対して $\Gamma_u^\alpha, \bar\Gamma_u^\alpha$ は同型である。

$$\Gamma_u^\alpha: \{Y,X\}_\alpha^G \cong \{Y\wedge X',\Sigma^V\}_\alpha^G, \quad \bar\Gamma_u^\alpha: \{Y,X'\}_\alpha^G\cong\{X\wedge Y,\Sigma^V\}_\alpha^G$$

[証明] Γ_u^α のみを考える。$\bar\Gamma_u^\alpha$ も同様にすればよい。

次の可換図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma^{n\omega+\bar V}Y, \Sigma^{n\omega+\bar W}X]^G} \arrow[rr, "u_{n*}"] \arrow[dr, "\lambda_{n*}"'] & & {[\Sigma^{n\omega+\bar V}Y\wedge X', \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^V]^G} \arrow[dl, "\mu_{n*}"] \\
& {[\Sigma^{n\omega+\bar V}Y, F(X', \Sigma^{n\omega+\bar W}\Sigma^V)]^G} &
\end{tikzcd}$$

ここで, $u_{n*}[f] = [u_{n\omega+\bar W,0}\circ f\wedge 1]$, $\lambda_n(x)(x') = u_{n\omega+\bar W,0}(x,x')$

$x\in\Sigma^{n\omega+\bar W}X$, $x'\in X'$, μ_{n*} は adjoint isomorphism である。又, $\varinjlim_n u_{n*} = \Gamma_u^\alpha$ であるから, 十分大なる n に対して λ_{n*} が同型であれば Γ_u^α が同型になる。従って λ_n を考えればよい。

次の可換図式を考える。 ($H\in\mathcal{S}(G)$)

$$\begin{tikzcd}
\pi_j((\Sigma^{n\omega+\bar{\omega}}X)^H) \arrow[r, "\lambda^H_{n*}"] \arrow[dr, "\psi_{H,n*}"'] & \pi_j(F(X', \Sigma^{n\omega+\bar{\omega}}\Sigma^{\nabla})^H) \arrow[d, "r_{H*}"] \\
 & \pi_j(F(X'^H, (\Sigma^{n\omega+\bar{\omega}}\Sigma^{\nabla})^H))
\end{tikzcd}$$

ここで r_H は restriction, $\psi_{H,n}(x)(x') = u^H_{n\omega+\bar{\omega},0}(x,x')$ である。

[12]により $\psi_{H,n*}$ は $(\Sigma^{n\omega+\bar{\omega}}X)^H$, $F(X'^H,(\Sigma^{n\omega+\bar{\omega}}\Sigma^{\nabla})^H)$ が 1-connected なら、$j<2(k-\dim X'^H)$, $K=\dim(n\omega+\bar{\omega}+\nabla)^H$ のとき同型であり r_{H*} は補題1.7より $j\le\min_{H'\in\mathcal{S}(H)} N^H_{H'}$ のとき同型である。

ここで
$$N^H_{H'} = \begin{cases} n\dim\omega^{H'}+\dim(\bar{\omega}+\nabla)^{H'}-1-\dim(X'^{H'}-X'^H) & \text{if } X'^{H'}\neq X'^H \\ \infty & \text{if } X'^{H'}=X'^H \end{cases}$$

従って λ^H_{n*} は $j\le(n-1)+\dim(n\omega+\bar{\omega}+\nabla)^H-2\dim X'$ のとき同型，

従って命題1.3より λ_{n*} は $n\geqslant 2\dim X'+\dim Y+\dim\nabla+2$ のとき同型，即ちこのとき u_{n*} も同型であるから D_u は同型である。

終

<u>命題2.2</u> X, X' を $\Sigma^{\nabla+1}$ ($\Sigma^{\nabla+\mathbb{R}}$) の G-subcomplex で $X, X'\in\mathcal{C}\mathcal{F}^G_*$, $X\wedge X'=\phi$, かつ inclusion $X'\hookrightarrow\Sigma^{\nabla+1}-X$ が G-homotopy equivalence であるものとする。このとき ∇-duality G-map $u: X\wedge X'\to\Sigma^{\nabla}$ が存在する。

u の構成は[11]と同様にすればよい。このとき再び[11]により u^H が duality map となり命題を得る。

<u>定理2.3</u> 任意の finite G-complex X には S-dual が存在する。

[証明] もし, $X \notin \mathcal{C}\mathcal{F}_*^G$ なら, $\Sigma X \in \mathcal{C}\mathcal{F}_*^G$ をとることにより $X \in \mathcal{C}\mathcal{F}_*^G$ と仮定してよい。$X \simeq_G K$ なる finite simplicial G-complex が存在するのでこれにおきかえて考える。適当な $\Sigma^{\bar{V}+1}$ をとり K を $\Sigma^{\bar{V}+1}$ に(単体的に) G-subcomplex としてうめこみ, その補複体 X' が $X' \in \mathcal{C}\mathcal{F}_*^G$ となる様にできる。従って上の命題より結果を得る。 終

<u>定理 2.4</u> X を compact smooth G-manifold とする。ν をある(同変)うめこみ $(X, \partial X) \subset (B(\bar{V}+\mathbb{R}), S(\bar{V}+\mathbb{R}))$ の normal bundle とすると, Thom space $T(\nu)$ は $X/\partial X$ の S-dual である。ここで $B(\bar{V}+\mathbb{R}), S(\bar{V}+\mathbb{R})$ は $\bar{V}+\mathbb{R}$ の unit ball と unit sphere である。

これは Atiyah [4] proposition (3.2) の equivariant version であり, 証明も同様にすればよい。又上の $\bar{V}+\mathbb{R}$ は, $\bar{V}^G \neq \phi$ なら $\bar{V}$ でおきかえてもよい。

例. $G/H^+ = G/H \cup \{pt\}$ は G/H^+ の S-dual である。(G: finite に注意)

以下の結果 2.5 ~ 2.8 は Spanier [12] P365 以下に対応し, 証明も同様にできる。(又は [12] の結果を使えばよい。)

<u>定理 2.5</u> $u: X \wedge X' \to \Sigma^{\bar{V}}$, $v: Y \wedge Y' \to \Sigma^{\bar{V}}$ を duality とすると同型 $D_{\bar{V}}^{\alpha}(u,v) = (\bar{D}_u^{\alpha})^{-1} \circ \bar{D}_v^{\alpha} : \{X, Y\}_{\alpha}^G \cong \{Y', X'\}_{\alpha}^G$ が存在して, $D_{\bar{V}}^{\alpha}(\bar{u}, \bar{v})$ が逆写像であり, 又十分大なる n と $f: \Sigma^{nW+\bar{U}} X \to \Sigma^{nW+\bar{W}} Y$, $f': \Sigma^{nW+\bar{U}} Y' \to \Sigma^{nW+\bar{W}} X'$ に対し, $D_{\bar{V}}^{\alpha}(u,v)\{f\} = \{f'\}$ となるのは, 次の図式が G-homotopy 可換であるときに限る。

$$\begin{tikzcd} \Sigma^{n\omega+\bar{V}} X \wedge Y' \arrow[rr, equal] \arrow[d, "f\wedge 1"'] & & X \wedge \Sigma^{n\omega+\bar{V}} Y' \arrow[d, "1\wedge f'"] \\ \Sigma^{n\omega+\bar{W}} Y \wedge Y' \arrow[r, "v_{n\omega+\bar{W},0}"] & \Sigma^{n\omega+\bar{W}}\Sigma^{\bar{V}} & X \wedge \Sigma^{n\omega+\bar{W}} X' \arrow[l, "u_{0,n\omega+\bar{W}}"'] \end{tikzcd}$$ 。

suspension 同型 $\sigma^{\bar{V}}: \{X,Y\}^G_\alpha \to \{\Sigma^{\bar{V}}X, \Sigma^{\bar{V}}Y\}^G_\alpha$ を $\{f\}\in\{X,Y\}^G_\alpha$

$f: \Sigma^{n\omega+\bar{V}}X \to \Sigma^{n\omega+\bar{W}}Y$ に対し，写像の合成

$$\Sigma^{n\omega+\bar{V}}\Sigma^{\bar{V}}X \overset{T\wedge 1}{\approx} \Sigma^{\bar{V}}\Sigma^{n\omega+\bar{V}}X \xrightarrow{1\wedge f} \Sigma^{\bar{V}}\Sigma^{n\omega+\bar{W}}Y \overset{T\wedge 1}{\approx} \Sigma^{n\omega+\bar{W}}\Sigma^{\bar{V}}Y$$

で定義する。　このとき，次が成立する。　//

<u>命題2.6</u>　$u: X\wedge X' \to \Sigma^{\bar{V}}$, $v: Y\wedge Y' \to \Sigma^{\bar{V}}$ を duality とする。

このとき次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd} \{X,Y\}^G_0 \arrow[r, "D^0_{\bar{V}}(u,v)"] \arrow[d, "\sigma^{\bar{V}}"'] & \{Y',X'\}^G_0 \\ \{\Sigma^{\bar{V}}X, \Sigma^{\bar{V}}Y\}^G_0 \arrow[ur, "D^0_{\bar{V}+\bar{V}}(u_{\bar{V},0}, v_{\bar{V},0})"'] & \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \{X,Y\}^G_0 \arrow[r, "D^0_{\bar{V}}(u,v)"] \arrow[dr, "D^0_{\bar{V}+\bar{V}}(u_{0,\bar{V}}, v_{0,\bar{V}})"'] & \{Y',X'\}^G_0 \arrow[d, "\sigma^{\bar{V}}"] \\ & \{\Sigma^{\bar{V}}Y', \Sigma^{\bar{V}}X'\}^G_0 \end{tikzcd}$$

<u>命題2.7</u>　$u: X\wedge X' \to \Sigma^{\bar{V}}$,　$v: Y\wedge Y' \to \Sigma^{\bar{V}}$, $w: Z\wedge Z' \to \Sigma^{\bar{V}}$ を duality とする。$\alpha\in\{X,Y\}^G_0$，$\beta\in\{Y,Z\}^G_0$ とするとき，$\beta\alpha\in\{X,Z\}^G_0$ で

$D^0_{\bar{V}}(u,w)\beta\alpha = (D^0_{\bar{V}}(u,v)\alpha)\circ(D^0_{\bar{V}}(v,w)\beta)$ である。　//

$u: X\wedge X' \to \Sigma^{\bar{V}}$，$v: Y\wedge Y' \to \Sigma^{\bar{V}}$ を duality とする。

$f: X\to Y$，$f': Y' \to X'$ に対し，次の図式は G-homotopy 可換

$$\begin{tikzcd} X\wedge Y' \arrow[r, "1\wedge f'"] \arrow[d, "f\wedge 1"'] & X\wedge X' \arrow[d, "u"] \\ Y\wedge Y' \arrow[r, "v"] & \Sigma^{\bar{V}} \end{tikzcd}$$

とする。このとき　$w: C_f \wedge C_{f'} \to \Sigma\Sigma^{\bar{V}} = \Sigma^{1+\bar{V}}$ を [12] p374 と同様に定義する。(但し parameter の位置は逆)　C_f は f の mapping cone である。

<u>定理2.8</u>　上に定義した w は $(\bar{V}+\mathbb{R})$-duality G-map であり，

次の$(V+\mathbb{R})$-duality の G-homotopy 可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
X\wedge\Sigma Y' \arrow[d, "1\wedge\Sigma f'"'] \arrow[dr, "f\wedge 1"] & & Y\wedge C_{f'} \arrow[dl, "1\wedge p'"'] \arrow[dr, "i\wedge 1"] & & C_f\wedge X' \arrow[dl, "1\wedge i'"'] \arrow[dr, "p\wedge 1"] & & \Sigma X\wedge Y' \arrow[dl, "1\wedge f'"'] \arrow[dr, "\Sigma f\wedge 1"] & \\
X\wedge\Sigma X' \arrow[d, "u_{0,1}"] & Y\wedge\Sigma Y' \arrow[d, "v_{0,1}"] & & C_f\wedge C_{f'} \arrow[d, "w"] & & \Sigma X\wedge X' \arrow[d, "u_{1,0}"] & & \Sigma Y\wedge Y' \arrow[d, "v_{1,0}"] \\
\Sigma^{1+V} \arrow[r, phantom, "="] & \Sigma^{1+V} \arrow[rr, phantom, "="] & & \Sigma^{1+V} \arrow[rr, phantom, "="] & & \Sigma^{1+V} \arrow[rr, phantom, "="] & & \Sigma^{1+V}
\end{tikzcd}$$
。//

duality G-map $u: X\wedge X'\to\Sigma^V$, finite G-complex Y, G-complex Z に対し，準同型 $\Gamma_u^\alpha(Y,Z): \{Y, X\wedge Z\}_\alpha^G \to \{Y\wedge X', \Sigma^V Z\}_\alpha^G$ を，次の写像の合成で定義する。

$$\{Y, X\wedge Z\}_\alpha^G \xrightarrow{(\wedge X')_*} \{Y\wedge X', X\wedge Z\wedge X'\}_\alpha^G \xrightarrow{(1\wedge T)_*} \{Y\wedge X', X\wedge X'\wedge Z\}_\alpha^G \xrightarrow{(u\wedge 1)_*} \{Y\wedge X', \Sigma^V Z\}_\alpha^G$$

<u>定理 2.9</u>　上の $\Gamma_u^\alpha(Y,Z)$ は，同型である。 //

Z が finite G-complex の場合は [12] と同様にできる。Z が G-complex の場合，$\{Y, X\wedge(\ )\}_\alpha^G$, $\{Y\wedge X', \Sigma^V(\ )\}_\alpha^G$ は共に加法性公理をみたす G-complex 上の reduced G-homology theory になり，比較定理により，$Z=G/H^+$, $H\in\mathcal{A}(G)$ の場合に $\Gamma_u^\alpha(Y,Z)$ が同型であるから，Z が G-complex のときにも同型である。

$\mathbb{E}$ を G-spectrum とする。G-complex X に対し

$$[X,\mathbb{E}]_\alpha^G = \varinjlim_n [\Sigma^{nW+\tilde{V}}X, \Sigma^{\tilde{W}}E_n]^G = \varinjlim_m \varinjlim_n [\Sigma^{mW}\Sigma^{nW+\tilde{V}}X, \Sigma^{mW}\Sigma^{\tilde{W}}E_n]^G$$

であるから，　$[X,\mathbb{E}]_\alpha^G = \varinjlim_n \{\Sigma^{nW+\tilde{V}}X, \Sigma^{\tilde{W}}E_n\}_0^G$　である。

<u>定理 2.10</u>　$u: X\wedge X'\to\Sigma^V$ を duality，$\mathbb{E}$ を G-spectrum，Y を finite G-complex とする。このとき同型

$$\Gamma_u^\alpha(Y,\mathbb{E}): [Y, X\wedge\mathbb{E}]_\alpha^G \cong [Y\wedge X', \Sigma^V\mathbb{E}]_\alpha^G \overset{(\sigma_*^V)^{-1}}{\cong} [Y\wedge X',\mathbb{E}]_{\alpha-V}^G$$

が成り立つ。ここで σ_*^V は G-homology の suspension 同型である。

特に $\tilde{h}_G^{\alpha}(X;\mathbb{E}) = [X, \mathbb{E}]_{-\alpha}^G$, $\tilde{h}_{\alpha}^G(X;\mathbb{E}) = [\Sigma^0, \mathbb{E}\wedge X]_{\alpha}^G$ とおくと、
$\tilde{h}_G^*$は reduced G-cohomology theory に、$\tilde{h}_*^G$ は reduced G-homology theory になる。従って定理2.10より次を得る。

<u>系2.11</u>　$\Gamma(\Sigma^0,\mathbb{E})$; $\tilde{h}_{\alpha}^G(X;\mathbb{E}) \cong \tilde{h}_G^{\nabla-\alpha}(X;\mathbb{E})$

$\tilde{h}_*^G$を finite G-complex の category $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の G-homology theory とする。finite G-complex X に対し S-dual X' が存在するから、
u : $\Sigma^{\nabla_1}X\wedge\Sigma^{\nabla_2}X' \to \Sigma^{\nabla}$ をこの duality G-map とする。$\alpha\in RO(G)$ に対し、$\tilde{h}_G^{\alpha}(X) = \tilde{h}_{\nabla-\nabla_1-\nabla_2-\alpha}^G(X')$ と定義し、[1] p250 と同様の考察を行なえば、$\tilde{h}_G^*$ が $\mathcal{C}\mathcal{F}_0^G$ 上の reduced G-cohomology theory になることが分かる。又[2]により $\tilde{h}_G^*$ は Ω-G-spectrum で表現される。
従って次を得る。(これは、G.W. Whitehead [14] の方法である。)

<u>定理2.12</u>　$\mathcal{C}\mathcal{F}^G$ 上の G-homology theory は Ω-G-spectrum で表現される。又 G-complex の category $\mathcal{C}\mathcal{W}^G$ 上の G-homology theory (加法性公理をみたす) は Ω-G-spectrum で表現される。

$G=\mathbb{Z}_2$ の場合、MR-theory を考える。[7] Cf.[3]. smooth $\mathbb{Z}_2$-manifold M の normal bundle ν が[7] の意味の 'real' vector bundle になるとき、M を weakly 'real-complex' manifold と呼ぶことにする。このとき Thom class $t(\nu)\in MR^{n,n}(T(\nu))$ ($n=\dim\nu$) と Thom 同型　$\Phi(\nu)^*$: $MR^{p,q}(M) \cong \widetilde{MR}^{p+n,q+n}(T(\nu))$,
$\Phi(\nu)_*$: $\widetilde{MR}_{p+n,q+n}(T(\nu)) \cong MR_{p,q}(M)$, が存在する。[7] 又 $\phi M = M^{\mathbb{Z}_2}$ は uniform dimension をもつ。　定理2.4とこれを組み合わせ

て次を得る。

定理 2.13　M を $\dim M = m+n$, $\dim \Phi M = n$ なる compact weakly 'real complex' manifold とする。このとき (Poincare) duality 同型

$$D_M : MR_{p,q}(M) \cong MR^{m-p,n-q}(M, \partial M),$$

$$D'_M : MR_{p,q}(M, \partial M) \cong MR^{m-p,n-q}(M), \quad p,q,m,n \in \mathbb{Z}$$

が存在する。

参考文献

[1] 荒木捷朗．一般コホモロジー，紀伊国屋書店 1975

[2] S. Araki, M. Murayama G-homotopy types of G-complex and representations of G-cohomology theories. to appear Publ. R.I.M.S Kyoto Univ.

[3] S. Araki, M. Murayama τ-cohomology theories to appear Japanese J. of Math.

[4] M. F. Atiyah Thom complexes Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961) 291-310

[5] A. L. Blakers, W. S. Massey The homotopy groups of a triad I, II. Ann. of Math 53 (1951) 161-205, 55 (1952) 192-201

[6] G. Bredon. Equivariant cohomology theories Lect. Note in Math 34. 1967

[7] M. Fujii Cobordism theory with reality Math J. Okayama Univ. 18 (1976) 171-188

[8]．小松．中岡．菅原．位相幾何学 I，岩波書店 1967

[9] T. Matumoto. On G-CW complexes and a theorem of J.H.C. Whitehead J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I. 18 (1971) 363-374.

[10] T. Matumoto Equivariant stratification of a differentiable transformation

group (to appear)

[11] E. H Spanier Infinite symmetric product, function spaces, and duality Ann. of Math. 69 (1959) 142-198

[12] E. H Spanier Function spaces and duality. Ann. of Math 70 (1959) 338-378

[13] E. H. Spanier Algebraic topology Mc Graw-Hill 1966.

[14] G. W Whitehead Generalized homology theories Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 227-283