

G 多様体上の孤立零点をもち G ベクトル場について

山口大 文理 小宮克弘

G をコンパクト Lie 群とする。(可微分) G 多様体 M の接バンドル $\tau(M)$ の (連続な) G -cross section λ を M 上の G ベクトル場 という。 $\lambda(x) \in M \subset \tau(M)$ となる点 $x \in M$ を λ の 零点 という。本稿においては、とくに、孤立した零点をもち G ベクトル場について考える。Rubinsztein [4] による球面の同変ホモトピー論を援用して、零点の指数に関するある種の条件の下で、その零点を除去しようという問題を中心に、さらに二、三の問題を考える。

§1. 準備

G 多様体 M の各点 x に対し、その点における G の isotropy subgroup を G_x で表わす。 G の任意の (閉) 部分群 H に対して、

$$M_H = \{ x \in M \mid G_x = H \}$$

$$M^H = \{ x \in M \mid G_x \supset H \}$$

とおく。これらは M の部分多様体である。 M 上の G ベクトル場 λ を M^H 上に制限することにより、 M^H 上のベクトル場が得られる。それを λ^H で表わすことにする。

$z \in M - \partial M$ を M 上のベクトル場 λ の孤立零点とする。 λ の z における指数 $\text{ind}(z; \lambda)$ は、 $(n-1)$ 次元単位球面 S^{n-1} からそれ自身への写像

$$f = d\varphi \circ \lambda \circ \varphi^{-1} / \| d\varphi \circ \lambda \circ \varphi^{-1} \|$$

の写像度 $\text{deg } f$ として定義される。ここに、 n は M の次元 φ は z の十分小さな近傍から \mathbb{R}^n への chart で z を原点 0 に写すものである。ここでとくに、 M が G 多様体、 λ が G 上の G ベクトル場であれば、 φ は z の G_z 不変で十分小さな近傍から G_z の n 次元直交表現 V への G_z 同変な chart としてとれるから、上のようにして induce される写像 f は V の単位球面 $S(V)$ からそれ自身への G_z 同変な写像となる。

G_z の任意の部分群 H に対して、 z は M^H 上のベクトル場 λ^H の孤立零点でもある。 G_z 同変な写像 $f: S(V) \rightarrow S(V)$ を $S(V)^H$ に制限することにより、写像 $f^H: S(V)^H \rightarrow S(V)^H$ が得られる。このとき明らかに、 $\text{ind}(z; \lambda^H) = \text{deg } f^H$ である。

写像度に関する約束: 空集合 \emptyset からそれ自身への (ただ

一つの写像 f に対し, $\deg f = 1$ とする. 従って, 0 次元多様体上のベクトル場は, 各点において指数 1 をもつ. 0 次元球面 S^0 からそれ自身への写像 f に対し, f が恒等写像のとき $\deg f = 1$, f が一変への写像であるとき $\deg f = 0$, f が二変を互替する写像であるとき $\deg f = -1$, と定義する.

§2. 存在

G 作用を考えない場合, 任意のコンパクト多様体上には有限個の零点をもつベクトル場が存在する. 一方, G 作用を考えると, 任意のコンパクト G 多様体上に有限個の零点をもつ G ベクトル場が存在するとは限らない. 例えば, 偶数次元の球面 S^{2n} を標準的な作用で $O(2n+1)$ 多様体とみると, S^{2n} 上の $O(2n+1)$ ベクトル場は S^{2n} のすべての点で零点となる trivial なベクトル場のみである. しかし, G を有限群に限れば, 任意のコンパクト G 多様体上には, 常に, 有限個の零点をもつ G ベクトル場が存在することがわかる.

定理 1. G を有限群, M をコンパクト G 多様体とする. このとき, M 上に次の (i), (ii), (iii) を満たす G ベクトル場が存在する. (i) 零点は有限個. (ii) M 上では 内向き

で零点はない。(iii) z を Δ の零点, H を G_z の部分群とするとき, $\text{ind}(z; \Delta^H) = \text{ind}(z; \Delta^{G_z})$.

上のような G ベクトル場を実際に構成することにより, この定理は示される。証明は省略する。

附記: G 多様体上の零点のない G ベクトル場の存在に関しては, Komiya [2], Hauschild [1] を見よ。

§3. 零点の除去

本稿の主要目的である G ベクトル場の零点の除去について論じる。

$z \in M$ を M 上のベクトル場 Δ の孤立零点とする。 G 作用を考えない場合, $\text{ind}(z; \Delta) = 0$, 即ち, §1 の写像 $f: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ が n 次元単位球体 D^n に拡張されれば, z の周辺でのみベクトル場を取替えることにより, 零点 z を除去することが出来る。 G 作用を考える場合も同様に, G_z 同変な写像 $f: S(V) \rightarrow S(V)$ が V の単位球体 $D(V)$ 上の G_z 同変写像に拡張されれば, z の orbit $G(z)$ の周辺でのみベクトル場を取替えることにより, M 上の G ベクトル場で, $G(z)$ の周辺ではもはや零点はなく, その外側では最初の G ベクトル場 Δ と一致するようなものを得ることが出来る。

よ、て、同変写像 $f: S(V) \rightarrow S(V)$ が $D(V)$ 上の同変写像に拡張されるための条件が必要になる、てくる。

補題 2. G を有限可換群、 V を G の直交表現で trivial action の直和因子をもつものとする。このとき、 G 同変写像 $f: S(V) \rightarrow S(V)$ が $D(V)$ 上の G 同変写像に拡張されるためには、 G の任意の部分群 H に対して、 $\deg f^H = 0$ であることが必要十分である。

この補題は、 $S(V)$ の G 同変写像を G 同変ホモトピーにより分類した Rubinsztein の結果 [4] より得られる。

附記: $S(V)$ の G 同変写像の G 同変ホモトピーによる分類に関して、S. J. Willson の論文 [6] もある。しかし、彼の証明の中にはミスがあり、得られた結果も一部正しくない。念のため附記しておく。

補題 2 を使、て次の定理を得る:

定理 3. G を有限可換群、 K を G の部分群とする。 ρ を G 多様体 M 上の G ベクトル場とし、 $\{z_1, z_2, \dots, z_p\}$ を M_K の連結成分 A 上の ρ の零点の全体とする。さらに、これらの零点は M における孤立零点で、かつ、 M の内点であるとする。

このとき、 K の任意の部分群 H に対して、

$$\sum_{i=1}^p \text{ind}(z_i; \Delta^H) = 0$$

であれば、 $G(A)$ の M における任意の G 不変な近傍 U に対して、次のような M 上の G ベクトル場 t が存在する： t は $G(A)$ 上では零点をもたず、 $M-U$ 上および ∂M 上では s と一致する。

[証明の概略] D を A の内点を中心とし半径が十分小さい

な M における球体とする。次のような G 微分同相写像 $f: M$

$\rightarrow M$ を構成することができ： $f(G(\{z_1, \dots, z_p\})) \subset$

$$G(\text{Int } D), \quad f|_{(M-U) \cup \partial M} = \text{identity}.$$

φ を、 D を含む K 不変な近傍から K の直交表現 V への K 同変

な chart とする。 $f: S(V) \rightarrow S(V)$ を $\S 1$ のようにして G ベ

クトル場 $df \circ \iota \circ f^{-1}$ および K 同変な chart φ から induce

される K 同変写像とする。このとき、定理の仮定より、 K の

任意の部分群 H に対して $\deg f^H = 0$ であることがわかる。

よって、補題2より、この f は $D(V)$ 上の K 同変写像に

拡張できる。従って次のような M 上の G ベクトル場 s_1 が存在

する： $G(D)$ 上では零点はなく、 $M - \text{Int } G(D)$ 上では

$df \circ \iota \circ f^{-1}$ に一致する。このとき、 $t = df^{-1} \circ \iota_1 \circ f$

が求める G ベクトル場である。

§4. 応用

応用 I G を有限可換群とし, M をコンパクト G 多様体とする。 Δ を定理 1 より得られる M 上の G ベクトル場とする。この Δ の零点を, 定理 3 を使って除去することにより, [2] の主定理の別証を与えることができる。

応用 II

定理 4. G を奇数位数の有限可換群とする。 W を n 次元コンパクト G 多様体とし, ∂W は \mathbb{Z}_2 の G 不変な $(n-1)$ 次元閉多様体 M_0, M_1 の disjoint union になっているとする。このとき, W 上の零点をもたない G ベクトル場で M_0 上では内向き, M_1 上では外向きであるものが存在するためには, G の任意の部分群 H および W^H の任意の連結成分 A に対して, $\chi(A) = \chi(A \cap M_0) = \chi(A \cap M_1)$ となることが必要十分である。ここに, $\chi(-)$ はオイラー標数。

注意: この定理は \mathbb{Z}_2 の閉 G 多様体が G 同変に Reinhart cobordant になるための必要十分条件を与える。Reinhart cobordism に関しては Reinhart [3], Stong [5] を見よ。

[証明の概略] W 上に定理に述べた G ベクトル場が存在すれば, A 上にも零点がなく $\partial A \cap M_0 = A \cap M_0$ 上で内向きの $A \cap M_1 = A \cap M_1$ 上で外向きの G ベクトル場が induce されるから, 必要であることは [3] よりわかる。十分であることは次のようにしてわかる。 $P = M_0 \times [0, 1]$ を M_0 の W における G 不変な collar とし, $Q = W - M_0 \times [0, 1)$ とする。定理1より得られる P, Q 上の G ベクトル場を ν_1, ν_2 とする。 ν_1 と, ν_2 の向きを逆にした $-\nu_2$ より W 上の G ベクトル場 ν_3 が得られる。 ν_3 は M_0 上で内向き, M_1 上で外向きである。この ν_3 の零点を定理3を使って除去すればよい。

参 考 文 献

- [1] H. Hauschild; Ein Hopfscher Satz über äquivariante Vektorfelder, (unpublished)
- [2] K. Komiya; A necessary and sufficient condition for the existence of non-singular G -vector fields on G -manifolds, Osaka J. Math., 13 (1976), 537-546.
- [3] B. L. Reinhart; Cobordism and the Euler

- number, *Topology*, 2 (1963), 173-177.
- [4] R. L. Rubinsztein; On the equivariant homotopy of spheres, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)*, 134 (1976).
- [5] R. E. Stong; Tangential cobordism, *Math. Ann.*, 216 (1975), 181-196.
- [6] S. J. Willson; Equivariant maps between representation spheres, *Pacific J. Math.*, 56 (1975), 291-296.