数理解析研究所講究録
319巻 1978年 54-64

球面上の involution の拡張について

北大　神島芳宣

Introduction.

Z_{2q} を order $2q$ の cyclic group とする。球面 S^{2n+1} 上に free な involution T が与えられた時、S^{2n+1} 上に free な Z_{2q}-action T' が存在して、Z_{2q} の subgroup Z_2 に制限した時の action, 即ち $T'|Z_2 = T'^q$ が T に一致する時, 球面 S^{2n+1} 上の free involution T は free Z_{2q}-action に拡張するという。この note において次のことを示す。

定理. 球面 S^{2n+1} $(n \geq 1)$ 上に, free P.L. (resp. topological) involution T が与えられた時, T は free P.L. (resp. topological) Z_{2q}-action に拡張できる。ここに q は任意.

証明の方法は次の通りである. $H = PL, Top$ とする. $\mathcal{S}H^{\varepsilon}(P^{2n+1})$ を $2n+1$- standard projective space P^{2n+1} 上の ε-homotopy structures の set とする, ここで $\varepsilon = h$ or s (homotopy or simple homotopy). $2n+1$-standard lens space $L^{2n+1}(2q)$ に対し，同様に $\mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{2n+1}(2q))$ とおく． Projection $p: P^{2n+1} \longrightarrow L^{2n+1}(2q)$ により q-fold covering map

$$p! : \mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{2n+1}(2q)) \longrightarrow \mathcal{S}H^{\varepsilon}(P^{2n+1})$$

が induce される。 Involution T が S^{2n+1} 上に与えられた時，$S^{2n+1}/T \in \mathcal{S}H^{\varepsilon}(P^{2n+1})$ であるから，定理は $Im\, p! \ni S^{2n+1}/T$ を示すことである。このために Wall 群において定義される transfer map を用いて，surgery exact sequence から，上のことを示すことができる．

1. Definition of transfer

G を finite group，H をその subgroup とする。 X^{2n-1} $(n \geq 3)$ を smooth or P.L. manifold with $\pi_1(X) = G$，ν をその stable normal bundle とする。 $[M, f] \in \mathcal{S}H^{\varepsilon}(X)$ を一つ fix する. $\mathcal{F}$ を τ_M の $f^*\nu$ の stable framing とする． この時，Wall [7] の realization theorem により，$x \in L_{2n}^{\varepsilon}(G)$ に対し，triad $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$ および map $F: (W, \partial_- W, \partial_+ W) \longrightarrow (X \times I, X \times 0, X \times 1)$ が存在して F は τ_M の $f^*\nu$ の stable framing $\mathcal{F}$ を extend する τ_W の $F^*(\nu \times I)$ の stable framing $\bar{\mathcal{F}}$ をもち，次の性質をみたす

(1) $(\partial_- W, F|\partial_- W) = (M, f)$,

(2) $F|\partial_+ W$ は ε-homotopy equivalence,

(3) $\theta(F, W) = x \in L_{2n}^{\varepsilon}(G)$,

$\tilde{X}$ を X の universal cover とする． $X_1 = \tilde{X}/H$ とおく．
次の pull-back diagram を考える．

$$\begin{tikzcd} W_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "p"] & X_1 \times I \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[r, "F"] & X \times I \end{tikzcd}$$

明らかに F_1 は $\tau_{W_1} \oplus F_1^*(\nu_1 \times I)$ の stable framing $\bar{F}_1$ をもつ，ここで ν_1 は X_1 の stable normal bundle．

$\tau_f(x) = \theta(F_1) \in L^{\varepsilon}_{2n}(H)$ とおく．

これは，x を与える normal cobordism のとり方によらないことがわかる。

Lemma 1.1. $x \in L^{\varepsilon}_{2n}(G)$ に対し，$x = \theta(F, W)$，ここで $(F|\partial_- W, \partial_- W) = (M, f)$．また $x = \theta(G, V)$，ここで $(G|\partial_- V, \partial_- V) = (X, id)$ とする．この時，$\tau_{id}(x) = \tau_f(x)$ （τ_f の definition は，f の choice によらない．

Lemma 1.2. $\tau_{id} : L^{\varepsilon}_{2n}(G) \longrightarrow L^{\varepsilon}_{2n}(H)$ は homomorphism である。

Proofs of Lemmas 1.1 and 1.2 は [2] をみよ。

従って transfer $\tau : L^{\varepsilon}_{2n}(G) \longrightarrow L^{\varepsilon}_{2n}(H)$ を，

$\tau = \tau_f$ とおいて，well defined な homomorphism である。

Proposition 1.3. transfer $\tau : L^{\varepsilon}_{2n}(G) \longrightarrow L^{\varepsilon}_{2n}(H)$ は homomorphism である．

Remark 1.4. inclusion $i: H \subset G$ は，Wall群の homomorphism $i_*: L_{2n}^{\varepsilon}(H) \longrightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(G)$ を induce する．この時，transfer map τ と i_* の次の性質が成り立つ（Conner-Floyd, Differentiable Periodic maps, P.54 参照）．

『$C(G)$ を G の center とする．もし $H \subset C(G)$ ならば，

$\tau \cdot i_*(x) = (G:H)x \quad ; \quad L_{2n}^{\varepsilon}(H) \longrightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(G) \longrightarrow L_{2n}^{\varepsilon}(H)$』

証明は[2]参照．

trivial map $\pi: G \longrightarrow 1$ に対し，$\pi_*: L_n^{\varepsilon}(G) \longrightarrow L_n(1)$ は onto であるから，reduced Wall群 $\widetilde{L_n^{\varepsilon}(G)} = \operatorname{Ker}\pi_*$ とおくと，

$$L_n^{\varepsilon}(G) = \widetilde{L_n^{\varepsilon}(G)} \oplus L_n(1) \quad \text{である．}$$

この時，定理の証明のために，次のことを証明する．

Lemma 1.5. $i: \widetilde{L_0^{\varepsilon}(Z_{2q})} \longrightarrow \widetilde{L_0^{\varepsilon}(Z_2)}$ は onto（modulo $L_0(1)$）である。

Proof. $L_0(Z_2) \cong 8Z \oplus 8Z$ である．同型対応は

$$x = \theta(F, W) \longmapsto (I(W), I(\widetilde{W})).$$

ここで $F: W \longrightarrow P^{4k+3} \times I$ は normal map $(k \geqq 1)$．$I(W)$ (resp. $I(\widetilde{W})$) は W (resp. $\widetilde{W}$) の index，$\widetilde{W}$ は W の universal cover．

Z_2 の generator を T とする．$x \in L_0(Z_2)$ の Atiyah-Singer invariant $\delta(T, x)$ は定義より

(1) $\qquad \delta(T, x) = \operatorname{Sign}(T, \widetilde{W}) = 2I(W) - I(\widetilde{W}).$

$\widetilde{\partial_\pm W}$ の Atiyah-Singer invariant $\sigma(T, \widetilde{\partial_\pm W})$ に対し，次が成り立つ

(2) $$\sigma(T, X) = \sigma(T, \widetilde{\partial_- W}) - \sigma(T, \widetilde{\partial_+ W}).$$

上の同型対応と(1)から，次が成り立つ．

(3) $\sigma(T, -) : L_0(Z_2)^{\sim} \longrightarrow 8Z$ は isomorphism であり，$\mathrm{Ker}\, \sigma = L_0(1)\ (\cong (I, 2I))$ である．

次に 3-complex projective space CP^3 に対し，[6] から，homotopy complex projective space HCP^3 が存在して，次の(4)をみたす．homotopy equivalence $f_i : HCP^3 \longrightarrow CP^3$ に対し，f_i を $CP^2 \subset CP^3$ 上 transverse regular にしたものを f_i とする．従って

$f_i' : f_i^{-1}(CP^2) = N \longrightarrow CP^2$ は，(restricted) normal map．この時，

(4) $$\theta(f_i') = 8i \quad \text{for each } i \in Z.$$

Fibration $p : L^7(2q) \longrightarrow CP^3$ により，f_i を induce してやると，

(5) $$g_i : L_i^7 \longrightarrow L^7(2q)$$

ここに，L_i^7 は homotopy lens space，g_i は ε-equivalence で，$L^5(2q)$ 上 transverse regular，$g_i^{-1}(L^5(2q)) = L_i^5$，$g_i : L_i^5 \longrightarrow L^5(2q)$ は (restricted) normal map である．$\theta(g_i) = 0$ in $L_1(Z_{2q})$ であるから，g_i は ε-homotopy equivalence $g_i' : L_i^{5\prime} \longrightarrow L^5(2q)$ に normally cobordant である．「Normal cobordism extension property」(see [4, P 45]) により，$g_i : L_i^5 \to L^5(2q)$ の normal cobordism を $g_i : L_i^7 \to L^7(2q)$ の normal cobordism に拡張できる．従って，g_i に normally cobordant な $h_i : L_i'^7 \longrightarrow L^7(2q)$ が存在して, $h_i^{-1}(L^5(2q)) = L_i'^5$, $h_i | L_i'^5 = g_i$ である. $N(L^5(2q))$ を $L^5(2q)$ の $L^7(2q)$ における tubular neighborhood とする. この時, normal map $h_i : L_i'^7 \longrightarrow L^7(2q)$ に対し, $h_i | L_i'^5 ; L_i'^5 \longrightarrow L^5(2q)$ は ε-equivalence より, h_i の surgery obstruction $\theta(h_i)$ は, restriction

$$h_i' \;;\; L_i'^7 - \mathrm{int}\, N(L_i'^5) \longrightarrow L^7(2q) - \mathrm{int}\, N(L^5(2q)) =$$

$D^6 \times S^1$ rel. boundary. の surgery obstruction に等しい, ここで $N(L_i'^5)$ は $N(L^5(2q))$ の h_i による pull-back とする. 従って,

$$\theta(h_i) = \theta(h_i / L_i'^7 - \mathrm{int}\, N(L_i'^5)) \in L_7(Z) \cong L_6(1) \cong Z_2 .$$

一方, $\theta(h_i) = \theta(g_i) = 0$ であるから, $h_i / L_i'^7 - \mathrm{int}\, N(L_i'^5)$ から, normal cobordism rel. boundary. が存在して,

$$h_i' \;;\; E \longrightarrow D^6 \times S^1 \quad \text{は homotopy-equivalence rel. boundary.}$$

である。

$M_i^7 = E \cup N(L_i'^5)$ とおくとき, map

$K \;;\; M_i^7 \longrightarrow L^7(2q)$ を

$K | E = h_i'$, $K | N(L_i'^5) = h_i$ とおくことによって定義すると, K は ε-equivalence である. g_i から h_i への normal cobordism と $h_i / L_i'^7 - \mathrm{int}\, N(L_i'^5)$ から h_i' への normal cobordism (rel. boundary) を合わせることによって, $g_i : L_i^7 \longrightarrow L^7(2q)$ から, $K : M_i^7 \longrightarrow L^7(2q)$ への normal cobordism が存在する. それを $F ; V \longrightarrow L^7(2q) \times I$ とすると

$\theta(F, V) \in L_8^{\varepsilon}(Z_{2q})$ である. transfer τ により

$\tau(\theta(F,V)) = \theta(F_1, V_1) \in L_8(Z_2)$ である．ここに $\widehat{\partial V_1} = \widehat{L_i^7} \cup \widetilde{M_i^7}$ である．

(4)より，$\widehat{L_i^7}$ は HCP^3 を fiber しているから

$$(6) \qquad \delta(T, \widetilde{L_i^7}) = \delta(-1, \widehat{HCP^3}) = 8i'.$$

また，homotopy projective space Q^{4k+3} に対し，Atiyah-Singer invariant $\delta(T, \widehat{Q^{4k+3}})$ は，Browder-Livesay invariant $\sigma(Q^{4k+3})$ に等しい（例えば，[1]を参照）．Browder-Livesay invariant が desuspension invariant であることに注意すると，上の M_i^7 の construction により q-fold cover $\overline{M_i^7}$ は，desuspend する homotopy projective space である（注．$(T, \widehat{M_i^7})$ は double suspension である．）．故に，

$$(7) \qquad \delta(T, \widehat{M_i^7}) = 0.$$

故に(2)，(6)そして(7)から，

$$\begin{aligned} \delta(T, \tau(\theta(F,V))) &= \delta(T, \theta(F_1, V_1)) \\ &= \delta(T, \widehat{L_i^7}) - \delta(T, \widetilde{M_i^7}) \\ &= 8i'. \end{aligned}$$

故に，(3)より，$\tau : L_0^{\varepsilon}(Z_{2q}) \longrightarrow L_0(Z_2)$ は onto (modulo $L_0(1)$) である．　証明終り．

2 Surgery exact sequence.

[7]により，次の surgery exact sequence がある．ここに $H = O, PL, Top$，$n \geq 2$ とする．

$$
(2.1)\quad
\begin{array}{ccccccc}
L_{2n+2}(Z_2) & \xrightarrow{w} & \mathcal{S}H(P^{2n+1}) & \xrightarrow{\eta} & [P^{2n+1}, G/H] & \xrightarrow{\theta} & L_{2n+1}(Z_2) \\
\uparrow \tau & & \uparrow P! & & \uparrow P^* & & \\
L^{\varepsilon}_{2n+2}(Z_{2q}) & \xrightarrow{w} & \mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{2n+1}(2q)) & \xrightarrow{\eta} & [L^{2n+1}(2q), G/H] & \xrightarrow{\theta} & L^{\varepsilon}_{2n+1}(Z_{2q})
\end{array}
$$

ここで，P^* は projection P ; $P^{2n+1} \longrightarrow L^{2n+1}(2q)$ により induce されたものである． 定義より (2.1) は，commutative diagram である．

Lemma 2.2. $H = PL$ or Top に対し，P^* ; $[L^{2n+1}(2q), G/H] \longrightarrow [P^{2n+1}, G/H]$ は onto である．

Proof． 任意の integer s に対し，$L^{2n+1}(s)$ を standard lens space とする．fibration P : $P^{2n+1} \longrightarrow CP^n$ に対し，

P^* ; $[CP^n, G/H] \longrightarrow [L^{2n+1}(s), G/H]$ が onto である

という事実（ Lemma 14A.2 [7], P186 参照 ）から出る。

Remark 2.3. $L_{2n+2}(1) \subset L_{2n+2}(Z_s)$ の $\mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{2n+1}(s))$ における w の作用は，$n \equiv 0\ (2)$，$n \equiv 1\ (2)$ に対し，それぞれ Kervaire manifold，Milnor manifold を $\mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{2n+1}(s))$ の element に adding することであるから，$H = PL$ or Top ならば，w の作用は trivial である．

Lens space $L^{4k+3}(2q)$ $(k \geq 1)$ の normal map に対し，次が成り立つ．

Lemma 2.4. natural projection d ; $Z_{2q} \longrightarrow Z_2$ は，isomorphism d ; $L^{\varepsilon}_3(Z_{2q}) \cong Z_2 \longrightarrow L_3(Z_2) \cong Z_2$ を induce

する。さらに，$H = 0$, PL or Top に対し，次の commutative diagram が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc}
[P^{4k+3}, G/H] & \xrightarrow{\theta} & L_3(Z_2) \\
\uparrow p^* & & \uparrow d \\
[L^{4k+3}(2q), G/H] & \xrightarrow{\theta} & L_3^{\varepsilon}(Z_{2q})
\end{array}$$

Proof は [2] 参照．

3 定理の証明

S^{2n+1} 上に free involution T が与えられたとする．この時，3つの cases に分けて証明する．

Case 1. $n=1$. [5] により S^3 上の free involution T は antipodal map に conjugate である．従って T は，S^3 上の free Z_{2q}-action に拡張する．

Case 2. $n \equiv 0\ (2)$. S^{4k+1} $(k \geq 1)$ 上に，free involution T が与えられたとする．Lemma 2.2 より $\eta(S^{4k+1}/T) \in \mathrm{Im}\, p^*$ である．$L_i^{\varepsilon}(Z_{2q}) = 0$ であるから，$\mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{4k+1}(2q))$ の element L^{4k+1} が存在して $\eta(P!(L^{4k+1})) = \eta(S^{4k+1}/T)$ である．

$L_2(1) = L_2(Z_2) \cong Z_2$ であるから，Remark 2.3 より，

$$S^{4k+1}/T \cong P!(L^{4k+1}).$$

Case 3. $n \equiv 1\ (2)$. S^{4k+3} $(k \geq 1)$ 上に free involution T があたえられたとする．Lemma 2.4 を使って，Case 2 と同様に，$\mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{4k+3}(2q))$

の element L^{4k+3} が存在して，$\eta(P_!(L^{4k+3})) = \eta(S^{4k+3}/T)$

が成り立つ．従って $x \in L_0(Z_2)$ が存在して，

$$W(x, P_!(L^{4k+3})) = S^{4k+3}/T \quad \text{である．}$$

Lemma 1.5 より $y \in L_0^{\varepsilon}(Z_{2q})$ が存在して，$\tau(y) = x \pmod{L_0(1)}$

である．$x - \tau(y) = x_0$，$x_0 \in L_0(1)$ とおくと，

$$\begin{aligned} S^{4k+3}/T &= W(\tau(y) + x_0, P_!(L^{4k+3})) \\ &= W(\tau(y), W(x_0, P_!(L^{4k+3}))) \\ &= W(\tau(y), P_!(L^{4k+3})) \quad \text{by Remark 2.3.} \\ &= P_! W(y, L^{4k+3}) \quad \text{by commutativity of (2.1).} \end{aligned}$$

$W(y, L^{4k+3}) = L_1^{4k+3} \in \mathcal{S}H^{\varepsilon}(L^{4k+3}(2q))$ は homotopy lens space.

故に，$S^{4k+3}/T = P_!(L_1^{4k+3})$．

証明終り．

Corollary 3.1．(川久保 [3])．$2n+1$ − topological (simple) homotopy lens space $L_2^{2n+1}(2q)$ で triangulate できないものが存在する．ここに $n \geq 2$．

Proof．$H = PL, Top$ に対する $[P^{2n+1}, G/H]$ の計算により

$$\mathcal{S}PL(P^{2n+1}) \xrightarrow{\text{forget. map.}} \mathcal{S}Top(P^{2n+1}) \xrightarrow{\psi} Z_2 \to 0$$

なる exact sequence (see [5]) がある．ψ は obstruction map．これより出る．

References

[1] Hirzebruch-Jänich, Involution and Singularities. Proc. Int. Colloq. on Algebraic Geometry, Bombay 1968.

[2] Y. Kamishima, Extension of involutions on spheres. Preprint.

[3] K. Kawakubo, Proc. of the Second Conference 1971, Part I. Springer.

[4] López De Medrano, Involutions on Manifolds, Springer 1971.

[5] G.R. Livesay, Fixed point free involutions on the 3-spheres, Ann. of Math. 72 603-611 (1960)

[6] Montgomery-Yang, Proc. of the Conference on Transformation Groups 175-192 (1969).

[7] C.T.C. Wall. Surgery on Manifolds Academic Press. 1970.