数理解析研究所講究録
319巻 1978年 39-53

同変写像のボルディスム群

九大 教養 鎌田正良

§1. 序

向きづけの無い可微分多様体を考える. m 次元閉多様体から n 次元閉多様体への連続写像 $\alpha_i = (M_i^m \xrightarrow{f_i} N_i^n)$, $i=1,2$ に対して，連続写像 $F: W \longrightarrow B$ が

(1) $\partial W = M_1 \cup M_2$, $\partial B = N_1 \cup N_2$, $\cup$ は disjoint sum

(2) $F|M_i = f_i$

をみたすように存在するとき，α_1 と α_2 はボルダントであると言い，この同値関係による類別の類を $[\alpha]$ で表わす. 和は

$$[M_1 \xrightarrow{f_1} N_1] + [M_2 \xrightarrow{f_2} N_2] = [M_1 \cup M_2 \xrightarrow{f_1 \cup f_2} N_1 \cup N_2],$$

（但し，$f_1 \cup f_2(x) = f_i(x)$ if $x \in M_i$, $i=1,2$ ）

なる写像の disjoint sum で定義する. このようにして得られるアーベル群を $\mathcal{N}_{m,n}$ によって表わす. $\mathcal{N}_{m,n}$ の構造は，Stong [8] によって完全に決定されている.

$\mathcal{F}$ を有限群 G の部分群の族で「$H \in \mathcal{F}$, $g \in G \Rightarrow gHg^{-1} \in \mathcal{F}$, $K \subset H (\in \mathcal{F}) \Rightarrow K \in \mathcal{F}$」をみたすものとする. $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ を

Gの部分群の族の組とする．$(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ 自由多様体 (M,φ), $\varphi: G\times M \longrightarrow M$, とは，$M$の各点$x$のイソトロピー群$G_x$は$\mathcal{F}$に属し，$x\in\partial M \Rightarrow G_x\in\mathcal{F}'$ をみたすものである．m次元及びn次元 $(\mathcal{F},\mathcal{F}')$ 自由多様体の間の同変写像$\alpha_i=((M_i^m,\varphi_i) \longrightarrow (N_i^n,\psi_i))$ $i=1,2$ に対して，同変写像$F:(W,W^+,\Phi) \longrightarrow (B,B^+,\Psi)$ が存在し次をみたす時α_1とα_2は同値とする．

(1) $\partial W = M_1\cup M_2\cup W^+, \partial B = N_1\cup N_2\cup B^+$, W^+, B^+は部分多様体

(2) $x\in W(\in B) \Rightarrow G_x\in\mathcal{F}$, $x\in W^+(\in B^+) \Rightarrow G_x\in\mathcal{F}'$

(3) $\Phi|G\times M_i=\varphi_i$, $\Psi|G\times N_i=\psi_i$, $F|M_i=f_i$

このような類別によって与えられるボルディスム群を$\mathcal{N}^G_{m,n}(\mathcal{F},\mathcal{F}')$で表わす．G多様体のボルディスム群[10]と同様，$\mathcal{F}''\subset\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ に対して，次の exact triangle が得られる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathcal{N}^G_{*,*}(\mathcal{F}',\mathcal{F}'') \arrow[rr] & & \mathcal{N}^G_{*,*}(\mathcal{F},\mathcal{F}'') \arrow[dl] \\
& \mathcal{N}^G_{*,*}(\mathcal{F},\mathcal{F}') \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

, [11].

[11]でStongは$\mathcal{F}=\{Z_2,\{1\}\}$, $\mathcal{F}'=\{\{1\}\}$, $\mathcal{F}''=\phi$ に対して$\mathcal{N}^{Z_2}_{*,*}(\mathcal{F},\mathcal{F}')$, $\mathcal{N}^{Z_2}_{*,*}(\mathcal{F}',\mathcal{F}'')$の構造について，homotopy representationを示している．

さて，この論文[11]でみられるようなボルディスム論の展開として，次の問題が考えられる．

[P-1] 有限群の準同型写像 $\rho: G_1 \longrightarrow G_2$ に対して，G_i 多様体 (M_i, φ_i) $i=1,2$ の同変写像 $f: (M_1, \varphi_1) \longrightarrow (M_2, \varphi_2)$ $(f(g_1 x) = \rho(g_1) f(x))$ の分類せよ．

[P-2] $\mathbb{Z}_2$-同変写像 $f: (M, \varphi) \longrightarrow (N, \psi)$ に対して，固定点集合への制限 $f_F: M_F \longrightarrow N_F$ と f との関係を調べよ．

この小文では，上述の問題に関する若干の試みと，それから派生するいくつかの問題を報告する．

§2. $\mathbb{Z}_2$-同変写像の固定点集合への制限

リーマン計量を保存する $\mathbb{Z}_2$-作用を有する m 次元多様体の間の同変写像 $f: (M^m, \varphi) \longrightarrow (N^m, \psi)$ に対して次の事を仮定しよう．f は可微分写像であって，各々の固定点集合を $M_F = \cup F_i$，$N_F = \cup F_i'$ (F_i, F_i' は i 次元成分) であらわすとき，f の微分写像 df は F_i の法ベクトル束 ν_i から F_i' の法ベクトル束 ν_i' へのバンドル写像を誘導し，$v, w \in E(\nu_i)$ に対し，

$$\langle v, w \rangle_M = \langle df\, v, df\, w \rangle_N$$

を満すものとする．$\langle\ ,\ \rangle$ はリーマン計量を表わす．ν_i と一次元 trivial 束 θ^1 の Whitney 和 $\nu_i \oplus \theta^1$ 上に $\mathbb{Z}_2$-作用を，

$$g \cdot (v, w) = (g \cdot v, -w) \qquad g \in \mathbb{Z}_2 \text{ は生成元}$$

とすれば，同伴球面バンドル $S(\nu_i \oplus \theta^1)$ に $\mathbb{Z}_2$ 作用が導入され

df より，$\mathbb{Z}_2$-自由多様体の間の同変写像 $\bar{f}_i : S(\nu_i \oplus \theta^1) \longrightarrow S(\nu_i' \oplus \theta^1)$ を得る．(cf. [4], §27)

命題 2.1. $\mathfrak{N}_{m,m}$ において，

$$[M^m \xrightarrow{f} N^m] = \sum [S(\nu_i \oplus \theta^1)/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\bar{f}_i} S(\nu_i' \oplus \theta^1)/\mathbb{Z}_2]$$

m 次元多様体，A, B の間の写像 $f : A \longrightarrow B$ に対して，$[A]^*$, $[B]^*$ を $\mathbb{Z}_2$-係数コホモロジーでの基本類とするとき，f の位数 $o(f)$ を次の式で定義する．$f^*[B]^* = o(f)[A]^*$．

定理 2.2. この節の仮定の下で，$f_i = f|F_i$ とし，$\chi(\cdot)$ で $\mathbb{Z}_2$-係数コホモロジーに簡約されたオイラー数とすると

$$o(f)\chi(N^m) = \sum o(f_i)\chi(F_i')$$

証明は $\sum [S(\nu_i)/\mathbb{Z}_2 \longrightarrow S(\nu_i')/\mathbb{Z}_2] = 0$ 及び命題 1.1 が用いられ，Stong [8] による写像 $f : A \longrightarrow B$ のボルディスム不変量 $\langle W_\omega(B) f_*(W_{\omega_1}(A)) \cdots f_*(W_{\omega_k}(A)), [B] \rangle$，($f_* : H^*(A) \longrightarrow H^*(B)$ は Umkehrung homomorphism) と k 次元ベクトル束 ξ^k の同伴射影空間バンドル $P(\xi^k)$ に対する特性類の関係式 $W_{n+k-1}(P(\xi^k)) = kc^{k-1}\pi^* W_n(X)$ [2] (c は $P(\xi^k)$ 上の標準直線束の 1 次 Whitney 類，$\xi \xrightarrow{\pi} X$ は n 次多様体 X 上のバンドル) を利用する．

この結果で，f を恒等写像とすれば，$\mathbb{Z}_2$-多様体 V の固定点集合 F に対しての次の式を得る．（[4, (27.2)]，[1]）

$$\chi(F) = \chi(V)$$

自然に次の問題が考えられる．

[P-3] ボルディスム不変量を利用して，一般次元の場合の写像 $f: M^m \longrightarrow N^n$ とその固定点集合への制限の関係を調べよ．

§3．ファイバー空間に附随した写像のボルディスム群

この節では群作用が自由な場合を考える．有限群の準同型写像 $\rho: H \to G$ に対し，自由 H 多様体 (M^m, φ) から自由 G 多様体 (N^n, ψ) への同変写像

$$f: M^m \longrightarrow N^n \quad , \quad f(h \cdot x) = \rho(h) f(x) \ , \ h \in H, \ x \in M$$

を (m, n) 次元の $(H \xrightarrow{\rho} G)$ 同変写像と呼ぶ．閉多様体間の (m, n) 次元 $(H \xrightarrow{\rho} G)$ 同変写像 $(M_i, \varphi_i) \xrightarrow{f_i} (N_i, \psi_i)$ $i = 1, 2$ がボルダントであるとは，適当なコンパクト多様体間の $(m+1, n+1)$ 次元 $(H \xrightarrow{\rho} G)$ 同変写像 $F: (W, \Phi) \to (B, \Psi)$ が存在し

(1) $\partial W = M_1 \cup M_2$，$\partial B = N_1 \cup N_2$

(2) $\Phi \mid H \times M_i = \varphi_i$，$\Psi \mid G \times N_i = \psi_i$，$F \mid M_i = f_i$

をみたすときに言う．この類別で得られるボルディスム群を

$$\mathcal{M}_{m,n}(H \xrightarrow{\rho} G)$$

と表わす．これを解析するために次の3つのボルディスム群を用意しよう．

（I）位相空間 X に対して，m 次元多様体 M，n 次元多様体 N との合成写像 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} X$ を考える．閉多様体との合成写像 $M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} X$，$i=1,2$ がボルダントであるとは，適当なコンパクト多様体との合成写像 $W \xrightarrow{F} B \xrightarrow{G} X$ が存在し

(1) $\partial W = M_1 \cup M_2$，$\partial B = N_1 \cup N_2$　(2) $F|M_i = f_i$，$G|N_i = g_i$

をみたすことである．このボルディスムによる類別から得る群を $\mathcal{N}_{m,n}(X)$ と表わす．

（II）位相空間 X，Y に対し，m 次元 M，n 次元 N なる多様体との図式 $X \xleftarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} Y$ を考える．閉多様体との図式 $X \xleftarrow{g_i} M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{h_i} Y$，$i=1,2$ がボルダントとは，適当なコンパクト多様体との図式 $X \xleftarrow{G} W \xrightarrow{F} B \xrightarrow{H} Y$ が存在して

(1) $\partial W = M_1 \cup M_2$，$\partial B = N_1 \cup N_2$

(2) $F|M_i = f_i$，$G|M_i = g_i$，$H|N_i = h_i$

をみたすことである．この類別で与えられるボルディスム群を $\mathcal{N}_{m,n}(X;Y)$ と表わす．

（III）写像 $g: X \to Y$ に対して，m 次元 M，n 次元 N なる多様体との可換な図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & X \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ N & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

を考える．

閉多様体との可換な図式 $\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "f_i"'] & X \arrow[d, "g"] \\ N_i \arrow[r, "h_i"] & Y \end{tikzcd}$ ，$i=1,2$ がボルダントと

は，コンパクトな多様体との可換図式

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & X \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "H"'] & Y \end{tikzcd}$$

が存在して，

(1) $\partial W = M_1 \cup M_2$, $\partial B = N_1 \cup N_2$

(2) $F | M_i = f_i$, $G | M_i = g_i$, $H | N_i = h_i$

をみたすことである．このボルディスム群を $\mathfrak{N}_{m,n}(X \xrightarrow{g} Y)$

と表わす．これは Stong によって考えられたものである．

<u>命題</u>3.1. ([11], [5]) $\mathfrak{N}_{m,n}(G \xrightarrow{id} G) \cong \mathfrak{N}_{m,n}(BG)$

但し，BG は G の分類空間を表わす．

<u>命題</u>3.2. $\mathfrak{N}_{m,n}(H \xrightarrow{\rho} G) \cong \mathfrak{N}_{m,n}(BH \xrightarrow{B\rho} BG)$

3.2の同型対応は $[(M,\varphi) \xrightarrow{f} (N,\psi)]$ に対して，

$$\begin{tikzcd} M/H \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & BH \arrow[d, "B\rho"] \\ N/G \arrow[r, "\bar{h}"] & BG \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ は商写像

$\bar{g}$, $\bar{h}$ は $M \to M/H$, $N \to N/G$ の分類写像

のボルディスム類を対応させる．

以上のことから [P-1] を調べるためには次の問題を解けば

よいことになる（これはStongの示唆による．）．

[P-4] ファイバー空間 $E\xrightarrow{g}X$ に関する写像のボルディスム $\mathfrak{N}_{m,n}(E\xrightarrow{g}X)$ を決定せよ．

<u>命題</u> 3．3． $\mathfrak{N}_{m,n}(X\times Y\xrightarrow{p}Y)\cong\mathfrak{N}_{m,n}(X;Y)$

この同型は，可換図式

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X\times Y \arrow[d, "p"] \\ N \arrow[r, "h"] & Y \end{tikzcd}$$

の類に対して，

$[X\xleftarrow{p_1\circ g}M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{h}Y]$ を対応させることによって得る．

[P-4] の問題については筆者は，射影 $p: X\times Y\longrightarrow Y$ の場合しかくわしく情報を得てない．即ち $\mathfrak{N}_{m,n}(X;Y)$ 及び $\mathfrak{N}_{m,n}(X)$ の構造が現在まで得られているところである．

$BO(n)$ 上の普遍束 γ_n 及び trivial k 次元束 θ^k 及び位相空間 X に対して， $\gamma_n\times\theta^k\times X\longrightarrow\gamma_{n+k}\times X$ なるバンドル写像が与えられて，これより Thom complex の間の写像

$$MO(n)\wedge S^k\wedge X^+\longrightarrow MO(n+k)\wedge X^+$$

を誘導し，この adjoint map $MO(n)\wedge X^+\longrightarrow\Omega^k(MO(n+k)\wedge X^+)$ より自然に $\Omega^l(MO(n)\wedge X^+)\longrightarrow\Omega^{k+l}(MO(n+k)\wedge X^+)$ が導かれる．これによって direct system $\{\Omega^k(MO(k+n)\wedge X^+, k\}$ が構成される．この system によって，次の同型を得る．

<u>命題</u> 3．4．（[11]，[5]） $\mathfrak{N}_{m,n}(X) \cong \varinjlim_{k} \mathfrak{N}_n(\Omega^k(MO(n-m+k))\times X)$

<u>命題</u> 3．5． $\mathfrak{N}_{m,n}(X;Y) \overset{\Phi}{\cong} \varinjlim_{k} \mathfrak{N}_n(\Omega^k(MO(n-m+k)\wedge X^+)\times Y)$

3.5の対応： $\alpha=[X \xleftarrow{g} M^m \xrightarrow{f} N^n \xrightarrow{h} Y]$ （f は可微分写像としてよい）に embedding $M \xrightarrow{e} S^k$ をとり，$M \xrightarrow{e\times f} S^k\times N^n$ の法ベクトル束 ν を考えその分類写像を f_ν とし，バンドル射影を π で表わす．このとき次の写像が導かれる．

$$\tilde{f}: S^k\times N^n \xrightarrow{c} D(\nu)/S(\nu) \xrightarrow{f_\nu\times g\circ\pi} D(\gamma_{n+k-m})\times X/S(\gamma_{n+k-m})\times X$$

$D(\ )$，$S(\ )$ は各々 disk（sphere）バンドルを表わす．

$\tilde{f}$ の adjoint map を $\tilde{\mathfrak{f}}: N^n \longrightarrow \Omega^k(MO(n-m+k)\wedge X^+)$ とすれば

$\Phi(\alpha)=[N^n \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{f}}\times h} \Omega^k(MO(n-m+k)\wedge X^+)\times Y)]$ で与えられる．

§4． $\varinjlim_{k} \mathfrak{N}_*(\Omega^k MO(k+n-m)\wedge X^+)$ 及び特性数

前節でみたように $\mathfrak{N}_{*,*}(X\times Y \xrightarrow{p} Y)$ は $\mathfrak{N}_{*,*}(X;pt) \cong \varinjlim_{k} \mathfrak{N}_*(\Omega^k(MO(k+n-m)\wedge X^+)$ が実質的に重要である．この構造を知るために次の重要な定理を思い起そう．

［Milnor-Moore [6]］ A を体 F 上の connected Hopf algebra とし，M を left A-module で counit U をもつような F 上の connected coalgebra とする．diagonal map $\Delta: M \longrightarrow M\otimes M$ が A-homomorphism であって，$A\to M$ $(a \longmapsto a\cdot U)$ が単射

ならばMは free A-module である.

定理 4.1. Xを H-空間で finite type の CW-complex とすると十分大きな k に対して,

$$\mathfrak{N}_{m,n}(X;pt) \cong \sum_{i+j=n} \mathfrak{N}_i \otimes \tilde{H}_j\left(\prod_{i=0}^{-m+n+k-2} K(\mathfrak{N}_i(X),\ n-m+i);\ \mathbb{Z}_2\right)$$

証明は Milnor-Moore の定理にある counit U の存在と, $a \longmapsto a\cdot U$ が単射であることを $\tilde{H}^*(MO \wedge X^+)$ に対して調べることが本質的である. 但し A として Steenrod algebra $\mathcal{O}\!\iota_2$ をとる. $\tilde{H}^*(MO;\mathbb{Z}_2)$ については counit は Thom類によって表現されるもの U であり, $a \longmapsto a\cdot U$ が単射であることは [13] で示されている. $\tilde{H}^*(MO \wedge X^+;\mathbb{Z}_2)$ の場合も counit として $U \otimes 1$ をとればよい.

さらに, 一般にして, 次の問題が生じる.

[P-5] Xを一般として $\varinjlim_k \tilde{H}_n(\Omega^k(MO(k+n-m)) \wedge X^+)$ の構造を調べよ.

$\varinjlim_k \tilde{H}_n(\Omega^k(MO(k+n-m);\mathbb{Z}_2)$ は Stong [8] によって, $\varinjlim_k \tilde{H}_*(\Omega^{2k}MU(n+k);\mathbb{Z})$ については, Ravenel - Wilson [7] によって研究されている.

この類に属する結果としては, Immersion のボルディスム群 $I(m,k)$ について

定理 4.2. [12] $I(m,k) \cong \mathfrak{N}_{m+k}(QMO(k))$

但し，$QMO(k) = \lim\limits_{r} \Omega^r \Sigma^r MO(k)$.

がある．さらに Immersion のボルディスムについては，Uchida [14] Wells [15] 等の研究がある．

特性数について述べることにしよう．有限型 CW-complex X, Y に対して，$\alpha = [X \xleftarrow{g} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{h} Y] \in \mathcal{N}_{m.n}(X : Y)$ の特性数を次の式で与える．

$$\langle g^*(x) f^* h^*(y) f^* f_*(W_{\omega_1}(M)) \cdots f^* f_*(W_{\omega_r}(M)) W_{\omega'}(M) f^* W_{\omega}(N), [M] \rangle$$

$x \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, $y \in H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$，$f_*$ は Umkehrung homomorphism．

定理 4.3．[5]　$\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha$ の任意の特性数 $= 0$

証明は命題 3.5，定理 3.1 を用いて示すことができる．

Embedding のボルディスム群は $\mathcal{N}_{n+k}(MO(k))$ で表現される．例えば $\mathcal{N}_{n+k}(MO(k)) \longrightarrow \mathcal{N}_{n, n+k}$ の像を調べたものとして Brown [3] の次の定理がある．

定理 4.4．[3]　$f : M^n \to N^{n+k}$ が embedding とボルダントであるための必要十分条件は次の２条件をみたす事である．

(i)　$\langle f^* W_{\omega}(N) \cdot W_{\omega_1}(M) \cdots W_{\omega_r}(M) (\overline{W}_i(f))^{r-1}, [M] \rangle = 0$

if $r > 1$，$i > k$.

(ii) $< W_\omega(N)\, f_* W_{\omega_1}(M) \cdots f_* W_{\omega_r}(M),\, [N] >$

$= < f^* W_\omega(N)\, W_{\omega_1}(M) \cdots W_{\omega_r}(M) (\overline{W}_k(f))^{r-1},\, [M] >$

但し, $\overline{W}(f) = \overline{W}(M) f^* W(N)$

$\overline{W}(M)\, W(M) = 1$

この定理から類推される問題として,

[P−6] $I(m,n) \longrightarrow \mathcal{N}_{m,n}$ の像を調べよ.

§5. $\mathcal{N}_{m,n}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q)$ について

$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q$ なる自然な射影に対する自由同変写像について述べることにする. 定理4.1 と命題3.5 を調べて具体的な $\mathcal{N}_{*,*}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q)$ の幾何学的生成元を知ることが目的である.

<u>命題</u>5.1. q が奇数 のとき

$$\mathcal{N}_{m,n}(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2)$$
$$\cong \sum_{i=0}^{m} \mathcal{N}_{m-i,\,n-i}([(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2,\, \mathbb{Z}_q \times S^i) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}_2, S^i)])$$

但し, $(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2,\, \mathbb{Z}_q \times S^i)$ は $\mathbb{Z}_q$ が $\mathbb{Z}_q$ に群作用で $\mathbb{Z}_2$ は S^i に対称点対応の作用で与えられる $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_2$−自由多様体, $(\mathbb{Z}_2, S^i)$ は対称点対応による $\mathbb{Z}_2$−多様体を示す.

命題 5.2. p, q が奇数のとき,

$$\mathcal{N}_{m,n}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q)$$
$$\cong \mathcal{N}_{m,n}([(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_q)])$$

命題 5.3. $n > 2m+2$ のとき

$$\mathcal{N}_{m,n}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2)$$
$$\cong \sum_{\substack{s+l+k=m \\ t+l+k=n}} \mathcal{N}_{s,t}([(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, S^l \times S^k) \xrightarrow{\pi \times id} (\mathbb{Z}_2, P^l \times S^k)])$$

但し, $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, S^l \times S^k)$ は $\mathbb{Z}_2$ が各々の球に対称点対応で作用する $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-多様体, $(\mathbb{Z}_2, P^l \times S^k)$ は $\mathbb{Z}_2$ が S^k に対称点対応で作用する $\mathbb{Z}_2$-多様体, P^l は実射影空間を示す.

[P-7] $\mathcal{N}_{*,*}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2)$ の生成元を決定せよ.
は残されている問題の一つである.

参考文献

[1] A. Borel et al, Seminar on transformation in groups, Ann. Study 46. Princeton (1960)

[2] A. Borel and F. Hirzebruch, On characteristic classes of homogenuous spaces I, Amer. J. Math. 80. 458-538

[3] R.L. Brown, Stiefel-Whitney numbers and maps

cobordant to embeddings, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 48. No. 1 (1975) 245–250

[4] P. E. Conner and E. E. Floyd, Differentiable Periodic maps, Ergebnisse der Mathematik und ihre Genzgebiete Band 33 (1964)

[5] M. Kamata, A generalization of cobordism of maps

[6] J. Milnor and J. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. 81. (1965) 211–264

[7] D. C. Ravenel and W. S. Wilson, The Hopf ring for complex cobordism

[8] R. E. Stong, Cobordism of maps, Topology vol. 5 (1966) 245–258

[9] R. E. Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton Math. notes (1968)

[10] R. E. Stong, Unoriented bordism and actions of finite groups, Mem. Amer. Math. Soc. 103. (1970)

[11] R. E. Stong, Equivariant bordism of maps, Trans. of Amer. Math. Soc. vol. 178 (1973) 449–458

[12] P. A. Schweitzer, Joint cobordism of immersions Lecture note 169 Springer Verlag (The Steenrod algebras and its applications) (1970) 267–282

[13] R. Thom, Quelques propiétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. 28 (1954) 17-86.

[14] F. Uchida, Exact sequences involving cobordism group of immersions, Osaka J. Math. 6 (1969) 397-408

[15] R. Wells, Cobordism groups of immersions, Topology 5 (1968) 281-294