数理解析研究所講究録
320巻 1978年 27-31

Locally Closedness of Unbounded Derivations in C^*-algebras

山形大 理　太田昇一

近年、C^*環上の非有界微分子(unbounded derivation)が、多くの人々によって研究されて来ました([3]の文献を参照)。物理数学においては、C^*環上の1助変数自己同型群の無限小作用素として、非有界微分子は現われて来ます。ここでは、その関連とは離れて、非有界微分子そのものの性質を調べることにします。

$\mathfrak{A}$をヒルベルト空間$\mathfrak{H}$上の単位元$1(=1_{\mathfrak{H}})$をもつC^*環とします。$\mathfrak{A}$における線型写像δが <u>*-derivation</u> であるとは、次の各性質を満たすことである;

(イ) その定義域$\mathcal{D}(\delta)$は、$\mathfrak{A}$における稠密な*-部分環,

(ロ) 各$a, b \in \mathcal{D}(\delta)$に対して、

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b),$$

$$\delta(a^*) = \delta(a)^* \quad 。$$

この稿では、以下証明は全て省きますが、*-derivationを調べ

る際に、有効な手段の一つである表現（Lorentz表現の特別なもの）について、最初に述べます。

定義域$\mathfrak{D}(\delta)$から、$\mathcal{B}(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H})$ (or $\mathfrak{A}\otimes M(2,\mathbb{C})$) への写像<u>$\pi_\delta$</u>を次のように定義します；

$$a\in\mathfrak{D}(\delta) \longrightarrow \pi_\delta(a)=\begin{pmatrix} a & 0\\ \delta(a) & a\end{pmatrix}$$

更に、$\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$上の *hermitian unitary* 作用素Jを、

$J(\xi\oplus\eta)=\eta\oplus\xi$（ここに、$\xi,\eta\in\mathfrak{H}$）で定義します。そして、$A\in\mathcal{B}(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H})$ に対して $A^J\equiv JA^*J$ と定義すると、

<u>*Lemma 1.*</u> $\pi_\delta(\mathfrak{D}(\delta))\equiv\{\pi_\delta(a) : a\in\mathfrak{D}(\delta)\}$ は*環（ここでの対合は $\pi_\delta(a)\to\pi_\delta(a)^J$ で入れる）になる。特に δ が *closed* ならば $\pi_\delta(\mathfrak{D}(\delta))$ は *semi-simple involutive Banach algebra* になる。しかもその *involution* は *hermitian* でもある。

$a=a^*\in\mathfrak{A}$ に対して、a と 1 で生成される部分C*環を $C(a)$ で示すことにする。各 $a=a^*\in\mathfrak{D}(\delta)$ に対して、δ の $C(a)\cap\mathfrak{D}(\delta)$ への制限 $\delta|_{C(a)\cap\mathfrak{D}(\delta)}$ が *closed*（i.e., 各 $\{a_n\}\subset C(a)\cap\mathfrak{D}(\delta)$ s.t. $\lim a_n=b$, $\lim\delta(a_n)=c$ ならば、$b\in C(a)\cap\mathfrak{D}(\delta)$ で $\delta(b)=c$）ならば、δ を <u>*locally closed*</u> と呼ぶことにします。

[注意] *locally closed* *-*derivation* は、必ずしも *closed* では

ない。実際、UHF-環の normal $*$-derivation は、locally closed だが、closed ではない。

Theorem 2. δ を locally closed $*$-derivation とする。そのとき，次の 1°, 2° が成り立つ。

1°, $\mathfrak{A}$ の単位元 1 は、自動的に $\mathcal{D}(\delta)$ に含まれる。

2°, $a=a^*\in\mathcal{D}(\delta)$ と，$\mathrm{Sp}(a;\mathfrak{A})$ を含む Jordan 閉曲線 ∂ の内部で、analytic な複素数値関数 $f(x)$ に対して，

$$f(a)\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial} f(\lambda)(\lambda-a)^{-1}d\lambda$$ は $\mathcal{D}(\delta)$ に含まれ，

$\pi_\delta(f(a))=f(\pi_\delta(a))$ が成り立つ。

Corollary 3. δ が closed ならば、各 $a=a^*\in\mathcal{D}(\delta)$ に対して，

$$\mathrm{Sp}(a;\mathfrak{A})=\mathrm{Sp}(\pi_\delta(a);\pi_\delta(\mathcal{D}(\delta))).$$

Theorem 4. δ を $*$-derivation とすると，次の条件は互いに同値である.

(1) 各 $a=a^*\in\mathcal{D}(\delta)$ に対して，$C(a)\subset\mathcal{D}(\delta)$.

(2) δ が locally closed で，$\mathcal{D}(\delta)$ の $a\geqq0$ の元が $\mathcal{D}(\delta)$ の中に平方根をもつ。

[注意] 上の Theorem 4 における (2) において locally closed を，closed で置き換えると，δ は有界 i.e., $\mathcal{D}(\delta)=\mathfrak{A}$ になる([1])。

前に述べたように locally closed からは一般に closed は出てこないが、自然な問題として、"locally closed ならば closable か?" を考える事にする。

<u>Theorem 5.</u> $\mathfrak{A}$ がコンパクト作用素全体からなる C^*-環を含んでいるとする。そのとき $\mathfrak{A}$ 上の locally closed $*$-derivation は closable である。

次に、δ が有界 $(\mathcal{D}(\delta)=\mathfrak{A})$ ならば、よく知られているように、ある $h=h^* \in \overline{\mathfrak{A}}^{w}$ があって、$\delta(a)=i[h,a]$ $(a\in\mathfrak{A})$ と書ける。以下では、δ が一般の unbounded derivation のとき、同じような事が起こるかという問題を考えます; i.e.,

"δ が closed $*$-derivation のとき、ある Hermitian 作用素(一般に unbounded)が存在して、$\mathcal{D}(\delta)\mathcal{D}(H)\subset\mathcal{D}(H)$ で

$$\delta(a)=i[H,a] \quad \text{on } \mathcal{D}(H) \quad (a\in\mathcal{D}(\delta)) \quad ?$$"。

この問題に対しては、次のような定理が得られる。

<u>Theorem 6.</u> 次の条件は同値。

(1) $\pi_\delta(\mathcal{D}(\delta))$ が、ある maximal J-positive invariant closed subspace $\mathfrak{M}$ を不変部分空間としてもつ。

(2) ある稠密な定義域をもつ strict maximal accretive 作用素 T が $\mathfrak{H}$ 上に存在して、$\mathfrak{M}=G(T)$, $\mathcal{D}(\delta)\mathcal{D}(T)\subset\mathcal{D}(T)$ で、

$$\delta(a)=[T,a] \quad \text{on } \mathcal{D}(T) \quad (a\in\mathcal{D}(\delta)).$$ (詳しくは[1]参照)。

文献

[1] S. Ôta ; Certain operator algebras induced by *-derivations in C*-algebras on an indefinite inner product space, to appear in J. Functional Anal.

[2] 〃 ; Locally Closedness of Unbounded Derivations in C*-algebras, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[3] S. Sakai ; Recent Developments in the Theory of unbounded Derivations in C*-algebras, U.S-Japan seminor on C*-algebras and their application to theoretical Physics, 1977, April 18-22.

[4] 〃 : The Theory of Unbounded Derivations in C*-algebras (Lecture Note) 1977.