数理解析研究所講究録
320巻 1978年 13-20

C*-接合積の双対性とCAR-代数上のゲージ作用について

高井博司（都立大理）

§0、序論

W*-力学系に於いて接合積の双対性は Takesaki, Nakagami, Landstad etc の人達によって展開されているが、一方 C*-力学系に対するそれは Takai, Landstad, Imai-Takai etc が考察している。ここでは Nakagami 流の方法を C*-接合積に用いて特に簡約された接合積の双対性を論じ、その後で可換群の場合の結果を導く。更に具体的事例に移り、最近特に議論の対象になっているCAR-代数のゲージ作用による C*-接合積の性質を述べ、最後にその上の状態についても触れる。

§1、C*-接合積の双対性

C*-力学系 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ に対して、簡約された C*-接合積を $C_r^*(\mathfrak{A}; \alpha)$ で表わす。そのときこの代数は $L^2(G; \mathfrak{H})$ 上に次の方法で忠実に表現される：

$$(x\xi)(g) = \int_G \alpha_g^{-1}[x(h)]\,\xi(h^{-1}g)\,dh$$

$x \in L^1_\alpha(G; \mathfrak{A})$, $\xi \in L^2(G; \mathfrak{H})$. W*-力学系についての Nakagami の方法より $C_r^*(\mathfrak{A}; \alpha)$ から $C_r^*(\mathfrak{A}; \alpha) \otimes_* C_r^*(G)$ への同型写像 β が存

在して

$$(\beta(x)\xi)(g,h) = \int_G \alpha_g^{-1}[x(k)]\,\xi(k^{-1}g,\,k^{-1}h)\,dk$$

$x \in L^1_\alpha(G;\mathfrak{A})$, $\xi \in L^2(G\times G;\mathfrak{H})$ が成立する。 $C_0(G)$ で G 上の複素数値連続関数で無限遠点で零になるもの全体とし、L を $C_0(G)$ の $L^2(G)$ 上への自然な表現とする。 $f \in C_0(G)$, $x \in C^*_r(\mathfrak{A};\alpha)$ に対して $f *_\beta x = (1\otimes L_f)\beta(x)$ とおき、その全体で生成された C^*-代数を $C^*_\alpha[C^*_r(\mathfrak{A};\alpha);\beta]$ とおく。我々は以下この代数（双対接合積と云うことにする）が $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,\mathcal{C}(L^2(G))$ に同型になることを示す。ただし $\mathcal{C}(L^2(G))$ は $L^2(G)$ 上の完全連続作用素全体の成す C^*-代数である。

$\iota\otimes L$ は $\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G)$ 上の忠実表現だから $\mathrm{Ind}(\iota\otimes L)$ は $C^*_r(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G);\alpha\otimes\tau)$ 上の忠実表現となる。ただし τ は $C_0(G)$ の移動作用である。 $(W\xi)(g,h) = \xi(g, gh)$, $\xi \in L^2(G\times G;\mathfrak{H})$ なるユニタリ作用素 W を用いると $C^*_\alpha[C^*_r(\mathfrak{A};\alpha);\beta] = Ad(W)\circ\mathrm{Ind}(\iota\otimes L)[C^*_r(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G);\alpha\otimes\tau)]$ となるので

補助定理１、 $C^*_\alpha[C^*_r(\mathfrak{A};\alpha);\beta] \simeq C^*_r(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G);\alpha\otimes\tau)$

を得る。

更に $\Phi(x)(g) = \alpha_g^{-1}[x(g)]$ （$x \in \mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G)$），$\tilde{\Phi}(x)(g) = \Phi[x(g)]$ $x \in L^1_{\alpha\otimes\tau}(G;\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G))$ とおくと容易に $\tilde{\Phi}[C^*_r(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G);\alpha\otimes\tau)] = C^*_r(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G);\iota\otimes\tau)$ となるから

補助定理２、 $C^*_r(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G);\alpha\otimes\tau) \simeq C^*_r(\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,C_0(G);\iota\otimes\tau)$

を得る。

今 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$, $(\mathcal{B}, H, \beta)$ を C^*-力学系とし π, ρ をそれぞれ $\mathfrak{A}$, $\mathcal{B}$ の忠実表現とすると $\mathrm{Ind}(\pi \otimes \rho)$, $(\mathrm{Ind}\,\pi) \otimes (\mathrm{Ind}\,\rho)$ はそれぞれ $C_r^*(\mathfrak{A} \hat{\otimes}_* \mathcal{B} ; \alpha \otimes \beta)$, $C_r^*(\mathfrak{A} ; \alpha) \hat{\otimes}_* C_r^*(\mathcal{B} ; \beta)$ の忠実表現となり $\mathrm{Ind}(\pi \otimes \rho)[C_r^*(\mathfrak{A} \hat{\otimes}_* \mathcal{B} ; \alpha \otimes \beta)] = (\mathrm{Ind}\,\pi) \otimes (\mathrm{Ind}\,\rho)[C_r^*(\mathfrak{A} ; \alpha) \hat{\otimes}_* C_r^*(\mathcal{B} ; \beta)]$ が云えるので、特別な場合として

補助定理 3、 $C_r^*(\mathfrak{A} \hat{\otimes} C_0(G) ; \iota \otimes \tau) \simeq \mathfrak{A} \hat{\otimes}_* C_r^*(C_0(G) ; \tau)$

を得る.

$\delta(f) = f(e)$ $(f \in C_0(G))$ とおくと δ は $C_0(G)$ 上の指標になり $\sum^{\oplus}_{g \in G} \tau_g \circ \delta$ は $C_0(G)$ の忠実表現となるので $\mathrm{Ind}\,\delta$ は $C_r^*(C_0(G) ; \tau)$ の忠実表現になる。そして $(\mathrm{Ind}\,\delta)[C_r^*(C_0(G) ; \tau)] = \mathcal{C}(L^2(G))$ が成り立つので

補助定理 4、 $C_r^*(C_0(G) ; \tau) \simeq \mathcal{C}(L^2(G))$

を得る.

上で得られた補助定理 1 ~ 4 を組み合わせると求める結果を得る.

定理 5、[双対定理] C^*-力学系 $(\mathfrak{A}, G, \alpha)$ に対して $C_r^*(\mathfrak{A} ; \alpha)$ から $C_r^*(\mathfrak{A} ; \alpha) \hat{\otimes}_* C_r^*(G)$ への同型写像 β が存在して、$C_r^*(\mathfrak{A} ; \alpha)$ の β による双対 C^*-積 $C_{\hat{\alpha}}^*[C_r^*(\mathfrak{A} ; \alpha) ; \beta]$ は $\mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathcal{C}(L^2(G))$ に同型になる. 更に β の双対写像 $\hat{\beta}$ は $\alpha \otimes Ad(\lambda)$ に移される。

今 G を可換群としたとき

$$(F\xi)(g,h) = \int_{\hat{G}} \langle h, p\rangle\, \xi(g,p)\, dp$$

$\xi \in L^2(G\times\hat{G}\,;\mathfrak{H})$, $g,h \in G$ とおく。ただし $\hat{G}$ は G の双対群とする。そのとき F は $L^2(G\times\hat{G}\,;\mathfrak{H})$ から $L^2(G\times G\,;\mathfrak{H})$ へのユニタリ作用素になり $C^*_{\alpha}[C^*_{r}(\mathfrak{A};\alpha);\beta] = Ad(F)\circ(\mathrm{Ind}\,\iota)[C^*_{r}(C^*_{r}(\mathfrak{A};\alpha);\hat{\alpha})]$ となる。ただし $\hat{\alpha}$ は α の双対作用である。更に $\hat{\beta} = Ad(F)\circ(\mathrm{Ind}\,\iota)\circ\hat{\hat{\alpha}}\circ(\mathrm{Ind}\,\iota)^{-1}\circ Ad(F^*)$ が成り立つ。G が可換より $C^*_{r}(\mathfrak{A};\alpha)$ は C^*-接合積 $C^*(\mathfrak{A};\alpha)$ に一致するので

系6、 G が可換のとき、$C^*(C^*(\mathfrak{A};\alpha);\hat{\alpha}) \simeq \mathfrak{A}\hat{\otimes}\,\mathcal{C}(L^2(G))$ を得る。更に $\hat{\hat{\alpha}}$ は $\alpha\otimes Ad(\lambda)$ と同値になる。

§2、 コンパクト接合積

ここでは G をコンパクト可換群とする。α の代数的不変量 $\Gamma(\alpha)$ を $\mathfrak{A}$ の α-不変な遺伝的な C^*-部分代数 $\mathfrak{B}\neq(0)$ に α を制限した作用 $\alpha^{\mathfrak{B}}$ のスペクトル $Sp(\alpha^{\mathfrak{B}})$ の共通部分 $\bigcap_{\mathfrak{B}} Sp(\alpha^{\mathfrak{B}})$ で定義すると $\hat{G}$ の部分群になる。今 $\mathfrak{A}$ を素な C^*-代数とすると

命題1、 $\mathfrak{A}$ の α による不動点全体 $\mathfrak{A}^{\alpha}$ が素になる為の必要十分条件は $\Gamma(\alpha) = Sp(\alpha)$ となることである。

という Connes の結果の C^*-代数に於ける解釈を得る。$\hat{G}$ は離散群なのでフーリエ展開を使うと $C^*(C^*(\mathfrak{A};\alpha);\hat{\alpha})^{\hat{\hat{\alpha}}}$ は $C^*(\mathfrak{A};\alpha)$ に同型になるので、§1の系6を使うと

命題2、 $C^*(\mathfrak{A};\alpha) \simeq (\mathfrak{A}\hat{\otimes}\,\mathcal{C}(L^2(G)))^{\alpha\otimes Ad(\lambda)}$

を得る。$\mathfrak{A}$が素であるとき $\mathfrak{A}\otimes\mathcal{C}(L^2(G))$ も素であるので、$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha\otimes Ad(\lambda))$, $Sp(\alpha\otimes Ad(\lambda)) = \hat{G}$ を使うと命題1から

命題3、 Gがコンパクト可換群で$\mathfrak{A}$が素のとき、$C^*(\mathfrak{A};\alpha)$が素になる為には $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ が成り立つことが必要十分である。

更に一般的に α-不変な自明でないイデアルを持たない時に$\mathfrak{A}$がG-素であるということにすると

命題4、 $C^*(\mathfrak{A};\alpha)$が素である為の必要十分条件は$\mathfrak{A}$がG-素で $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ であることである。

単純環に関しては、 $C^*(\mathfrak{A};\alpha)$ が単純ならば $\mathfrak{A}$がG-単純で $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ が云えるが、逆は必ずしも真でないことを次節で示す。

命題5、 Gが離散可換群のとき、 $C^*(\mathfrak{A};\alpha)$ が素である為には $\mathfrak{A}$ が G-単純で $\Gamma(\alpha) = \hat{G}$ であることである。

§3、 CAR-代数上のゲージ作用

可算無限次元ヒルバルト空間$\mathfrak{H}$上のCAR-代数 $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$ は(2^∞)型のUHF-代数になることは知られているが $\alpha_t(a(f)) = e^{it}a(f)$ $(f\in\mathfrak{H},\ t\in T^1)$ で T^1の$\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$上の作用を定めると $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$ の α による不動点代数 $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha$ は UHF-代数ではないがAF-代数となる。更に $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha$は素になるので §2、命題1により $\Gamma(\alpha) = Sp(\alpha)$ が云える。αの定義より $1\in Sp(\alpha)$ は容易に成り立つので $\Gamma(\alpha) = \mathbb{Z}$ が云える。よって §2.命題4より $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)$ は素である。

一方 $\alpha_t(\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)) = \mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)$ $(n \geq 1,\ t \in T^1)$, $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n);\alpha) \simeq \mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n) \hat{\otimes} C_0(\mathbb{Z})$ となる。ただし $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$: CONS ($\subset \mathfrak{H}$) に対して $\mathfrak{H}_n = [\xi_i;\ 1 \leq i \leq n]$ である。よって $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)$ は AF-代数になる。更にそのダイアグラム $\mathcal{D}[C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)]$ を考えることにより単純にはならないことが分かる。更に $\mathcal{D}[C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)] \neq \mathcal{D}[\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^{\alpha}]$ より $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha) \not\simeq \mathfrak{A}(\mathfrak{H})^{\alpha} \hat{\otimes} \mathcal{C}(L^2(T^1))$ を得る。よって

命題1、 $\alpha \otimes Ad(\lambda) \not\simeq \alpha \otimes id$ $\left(\text{on } \mathfrak{A} \hat{\otimes} \mathcal{C}(L^2(T^1))\right)$

を得る。

一方 θ を T^1 の無理数の角度とし $\beta_n = \alpha_{n\theta}$ $(n \in \mathbb{Z})$ で $\mathbb{Z}$ の $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$ 上への作用 β を定めると $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\beta)$ は単純になる。何故なら β_k $(k \neq 0)$ は $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$ の外部自己同型写像より $\Gamma(\beta)^{\perp} = \{0\}$ となるので $\Gamma(\beta) = \mathbb{Z}$ を得る。よって §2、命題5より結論を得る。

§4、ゲージ不変擬自由状態

この節では§3の記号をそのまま使うことにする。$0 \leq A \leq 1$ なる $\mathfrak{H}$ 上の作用素 A に対して

$$\omega_A[a(f_m)^* \cdots a(f_1)^* a(g_1) \cdots a(g_n)] = \delta_{n,m} \det[\langle A g_i | f_j \rangle]$$

$(f_i, g_j \in \mathfrak{H})$ で定義すると、$\omega_A \circ \alpha_t = \omega_A$ なる $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})$ 上の状態になる。今 $L^1_{\alpha}(T^1;\mathfrak{A}(\mathfrak{H}))$ 上の状態 $\overline{\omega}_A$ を

$$\overline{\omega}_A(x) = \int_{T^1} \omega_A[x(t)]\, dt$$

で定義すると実際に $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)$ 上に拡張でき、それを同じ $\overline{\omega}_A$

で表わすことにする。以後 A は射影作用素に限る。そのとき $\overline{\omega}_A$ は $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)$ 上の純粋状態になる．実際 $\pi_{\omega_A}, \pi_{\overline{\omega}_A}$ をそれぞれ $\omega_A, \overline{\omega}_A$ の GNS－表現とする。$\omega_A \circ \alpha_t = \omega_A$ より π_{ω_A} に随伴したユニタリ表現 u^A を考えると $\pi_{\overline{\omega}_A}[C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha)]' \simeq \pi_{\omega_A}[\mathfrak{A}(\mathfrak{H})]' \cap u^A(T^1)'$ が云えるので $\pi_{\omega_A}[\mathfrak{A}(\mathfrak{H})]' = \mathbb{C}1_{\omega_A}$ と合わせると結論を得る．$\alpha_t|_{\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)} = Ad(u_t^{(n)})$ なるユニタリ表現 $u^{(n)}$ で $u_t^{(n)} \in \mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)$ $(t \in T^1)$ なるものが存在するので $(e_{ab}^{(n)})_{a,b\in\{1,2\}^n}$ を $\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)$ の単位マトリックス系とすると $f_{ab}^{(nk)}(t) = e_{ab}^{(n)} u_t^{(n)*} e^{ikt}$ と定義すると $f_{ab}^{(nk)} f_{cd}^{(nl)} = \delta_{kl}\delta_{bc} f_{ad}^{(nk)}$, $f_{ab}^{(nk)*} = f_{ba}^{(nk)}$ が成り立つ。よって $C^*(f_{ab}^{(nk)} : a,b \in \{1,2\}^n)$ を $\mathcal{B}_k^{(n)}$ とおくと $C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n);\alpha) = C^*(\infty)\text{-}\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_k^{(n)}$ となる。

今 $f_{ab}^{(nk)}$ に対して $\overline{\omega}_A[f_{ab}^{(nk)}] = \delta_{ab}\delta_{kn_a}\omega_A(e_{ab}^{(n)})$ となる。ただし n_a は $a(i)=1$ なる $1 \le i \le n$ の個数を表わす．実際、

$$
\begin{aligned}
\overline{\omega}_A[f_{ab}^{(nk)}] &= \int_{T^1} e^{ikt}\,\omega_A[\Pi_{\ell=1}^n e_{a_\ell b_\ell}^{(\ell)}(e^{-it}e_{11}^{(\ell)} + e_{22}^{(\ell)})]dt \\
&= \int_{T^1} e^{ikt}\,\Pi_{\ell=1}^n\,\omega_A[e^{-it}\delta_{b_\ell 1} e_{a_\ell 1}^{(\ell)} + \delta_{b_\ell 2} e_{a_\ell 2}^{(\ell)}]dt \\
&= \int_{T^1} \delta_{ab} e^{ikt}\,\Pi_{\ell=1}^n[e^{-it}\delta_{a_\ell 1}\omega_A(e_{11}^{(\ell)}) + \delta_{a_\ell 2}\omega_A(e_{22}^{(\ell)})]dt \\
&= \int_{T^1} e^{ikt} e^{-in_a t}\delta_{ab}\,\Pi_{j=1}^{n_a}\omega_A(e_{11}^{(\ell_j)})\,\Pi_{j=n_a+1}^{n}\omega_A(e_{22}^{(\ell_j)})dt \\
&= \delta_{ab}\delta_{kn_a}\,\omega_A(e_{ab}^{(n)})
\end{aligned}
$$

となる。よって $\overline{\omega}_A|_{\mathcal{B}_k^{(n)}} = 0$ $(k \le -1,\ k \ge n+1)$ を得る。$0 \le k \le n$ ならば $\|\overline{\omega}_A|_{\mathcal{B}_k^{(n)}}\| \le \|\omega_A|_{\mathfrak{A}_k^{(n)}}\|$ を得る。ただし $\Lambda_k = \{a \in \{1,2\}^n : n_a = k\}$, $\mathfrak{A}_k^{(n)} = C^*(e_{ab}^{(n)} : a,b \in \Lambda_k)$ とする。$\alpha_t(e_{ab}^{(n)}) = e^{it\sum_{j=1}^n (b(j)}$

$-a(r))\ e^{(n)}_{ab}$ より $\mathfrak{A}^{(n)}_k \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)^\alpha$ を得る。更に $\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)^\alpha = \oplus_{k=0}^{n} \mathfrak{A}^{(n)}_k$ が成り立つので $\| \overline{\omega}_A |_{\oplus_{k=0}^{n} \mathcal{B}^{(n)}_k} \| \leq \| \omega_A |_{\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)^\alpha} \|$ $(n \geq 1)$ が云える。$C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n);\alpha) = \oplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}^{(n)}_k$ より $\| \overline{\omega}_A |_{C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n);\alpha)} \| \leq \| \omega_A |_{\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)^\alpha} \|$ $(n \geq 1)$ となる。$C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H});\alpha) = [\bigcup_{n=1}^{\infty} C^*(\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n);\alpha)]^-$, $\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha = [\bigcup \mathfrak{A}(\mathfrak{H}_n)^\alpha]^-$ であるから $\| \overline{\omega}_A \| \leq \| \omega_A |_{\mathfrak{A}(\mathfrak{H})^\alpha} \|$ を得る。$\| \omega_A \| \leq \| \overline{\omega}_A \|$ は容易であるので $\| \overline{\omega}_A \| = \| \omega_A \|$ となる。よって次の結果を得る。

命題1. $\overline{\omega}_A \simeq \overline{\omega}_B$ なる為の必要十分条件は $\omega_A \simeq \omega_B$ である。ただし A, B は $\mathfrak{H}$ 上の射影作用素とする。

一般の正値作用素に対する問題は今後の興味ある課題の一つである。

参考文献

[1] Y. Nakagami: *Dual action of a von Neumann algebra and Takesaki's duality for a locally compact group*, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol 12, (1977), 727 − 775.

[2] H. Takai: *On a duality for crossed products of C*-algebras*, Jour. Func Anal 19 (1975), 25 − 39.

[3] H. Takai and S. Imai: *On a duality for C* crossed products by a locally compact group*, Jour. Math. Soc. Japan., No 2 (1978)