

Title	$f_{*} \omega_{(M/S)}$ の Semi-Positivity について (幾何学における大域的解析学)
Author(s)	藤田, 隆夫
Citation	数理解析研究所講究録 (1978), 321: 101-102
Issue Date	1978-03
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/104015">http://hdl.handle.net/2433/104015</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

$f_* \omega_{M/S}$  の semi-positivity について

東大 教養 藤田 隆夫

$f: M \rightarrow S$  を代数多様体の fiber space,  $\omega_{M/S}$  をその relative dualizing sheaf  $\mathcal{O}_M(K_M - f^*K_S)$  とする。このとき, 小平次元の加法不等式予想と関連して (cf. [1]) 次の予想が考えられる:

予想. 上の状況の下,  $f_* \omega_{M/S}$  は  $S$  上 numerically -semi positive である。 (以下 n. s. pos. と略記する)

ただしここで n. s. pos. とは次の意味である:

定義. 多様体  $V$  上の line bundle  $L$  は,  $V$  の任意の部分多様体  $W$  に対して  $L^r \{W\} \geq 0$  ( $r = \dim W$ ) が成立つとき, n. s. pos. と呼ばれる。  $V$  上の連接層  $\mathcal{E}$  は,  $P(\mathcal{E}) = \text{Proj}_V \left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} S_{\mathcal{O}_V}^k \mathcal{E} \right)$  上の可逆層  $\mathcal{O}(1)$  (に対応する line bundle) が n. s. pos. のとき, n. s. pos. と呼ぶ。

上の予想は,  $f$  に特異ファイバーが存在しない場合には事実成立つことが Griffiths により示されている ([3])。

本講の目的は次の部分的結果につき述べることにある:

定理 <sup>(2)</sup>  $\dim S = 1$  の時には, 先の予想が事実成立つ。

以下証明方針を略述する。まず, 主に duality 理論に関連する純代数幾何的手法により, 次の補題に帰着させる。

補題。定理の条件のもと,  $\mathcal{L}$  を  $f_* \omega_{M/S}$  の準同型像たる任意の可逆層とする。このとき,  $\deg \mathcal{L} \geq 0$ 。

<sup>補題の</sup>証明の方針。  $L$  を  $\Sigma$  に対応する line bundle とし,  $\Sigma$  を  $f: M \rightarrow S$  の singular locus とする。  $S' = S - \Sigma$  上の点上の fiber は非特異なので,  $X$  の上の Hodge 構造を用いて,  $L|_{S'}$  上に自然な Hermitian norm が定義できる。しかしこの norm は  $\Sigma$  には一般には拡張できない。しかしながら,  $X$  を  $\Sigma$  の近傍のみで少し変形するテクニックにより, 次のような式を得る:  $\deg \mathcal{L} = \int_S \omega + \sum_{p \in \Sigma} \sigma_p$ 。ただしここで  $\omega$  は  $L|_{S'}$  上の上記 norm に対し定義された曲率テンソル ( $\Sigma = \emptyset$  なるこれが  $L$  の Chern 類を表わす), 積分は広義積分,  $\sigma_p$  は各  $p \in \Sigma$  に対し適当に定義された補正項。さて Griffiths 理論により  $\int_S \omega \geq 0$  は示せる。また norm の  $p$  近傍での振舞いを調べ,  $\sigma_p \geq 0$  も出る。

[文献]

- [1] 筆者, 小平次元の理論の過去・現在・未来 (数学)  
 [2] Fujita, T.: On Kähler fiber spaces over a curve, J. Math. Japan  
 [3] Griffiths, P.: Periods of Integrals III, IHES 38