数理解析研究所講究録
321巻 1978年 88-100

微分型式の環と双曲性

東京大学 理　　飯高 茂

§1 以下 $k=\mathbb{C}$ とおき，代数多様体，正則写像等は k スキームの圏でのそれと理解することにしよう．

V を n 次元代数多様体とすると，その上の対数的 i 型式は有限次元のベクトル空間 $T_i(V)$ を形成する．$T_i(V)$ の次元は，V の対数的 i 不正則数とよばれ $\bar{q}_i(V)$ で記される．$\bar{q}_1$ を $\bar{q}$ とかき，対数的不正則数とよぶ．さて，$\wedge^i T_1(V)$ から $T_i(V)$ に自然な写像ができるから，その像を $A_i(V)$ で書く．$A_1(V)=T_1(V)$ であり $A_0(V)=k$ とおけば $\oplus A_i(V)$ は次数環となる．かくしてえた環を $A(V)$ であらわそう．これが標題に書いた微分型式の環であり，V の日輪代数（solar algebra）とよぶことにしたい．

さて，一般に次数環 $A=\oplus A_j$ は次の条件を満たすとき，抽象日輪代数とよばれる．

1) $A_0=k$，A_1 は有限次元

ii) A_1 は $A_+ = \bigoplus_{i>0} A_j$ と生成する，

iii) A は次数環として交代的．即ち，$u \in A_i$，$v \in A_j$ とするとき，$uv = (-1)^{ij} vu$．

典型的な例は外積代数 $\wedge^{\cdot}(E)$ であって，これが最も普遍的である．即ち，$\wedge^{\cdot}(A_1) \longrightarrow A$ に自然な全射ができるので，同次イデアル I ($I_0 = I_1 = 0$) によって，

$$\wedge^{\cdot}(A_1)/I \xrightarrow{\sim} A$$

なる同型ができる．$A_n = 0$ なら $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = 0$ であり，$\delta(A) = \max\{n\,;\, A_n \neq 0\}$ とおくと，A の不変量をえる．A を一つの太陽系とみたてるとき，$\delta(A)$ はその惑星の数にあたる．さて，日輪代数 A，B の与えられたとき，日輪代数としての最も不変的な積は次式で与えられる．即ち，

$$\wedge^{\cdot}(B_1)/J \xrightarrow{\sim} B$$

と B も表わすと，日輪代数 $\wedge^{\cdot}(A_1 \oplus B_1)/(I, J)$ がそれである．これを $A \odot B$ で表わし，A と B の日輪積 (solar product) とよぶ．次の性質は容易にわかる：$n = \delta(A)$，$m = \delta(B)$ とおくとき，

$$A_n \otimes B_m \xrightarrow{\sim} A_n \cdot B_m \subset (A \odot B)_{n+m}$$

これにより，

$$\delta(A \odot B) = \delta(A) + \delta(B)$$

をえる．

A_1 の元 $u_1,\cdots,u_{n+1}$ ($n=\delta(A)$ として) の与えられたとき、次の略記法を使う:

$$\hat{u}_1 = u_2\cdots u_{n+1},\quad \hat{u}_2 = u_1 u_3\cdots u_{n+1},\quad \cdots,\quad \hat{u}_{n+1} = u_1\cdots u_n .$$

これらは、A_n の元である。さて、

A が非退化を、$\hat{u}_1,\cdots,\hat{u}_{n+1}$ が1次独立となるような A_1 の元 $u_1,\cdots,u_{n+1}$ の存在することと、と定義しよう。

このとき、$u_1,\cdots,u_{n+1}$ に1次変換して $v_1,\cdots,v_{n+1}$ をえても $\hat{v}_1,\cdots,\hat{v}_{n+1}$ は、同じく、1次独立である。従って、$u_1,\cdots,u_{n+1}$ らのはる $n+1$ 次元のベクトル空間 $E\subset A_1$ を考え、

$\hat{E} = \{\sum u_{j_1}\cdots u_{j_n}\ ;\ u_{j_i}\in E\}$ とおけば、$\dim\hat{E} = n+1$ といいかえられる。

A, B が非退化なら $A\odot B$ も非退化である。

実際、定義に合致した $u_1,\cdots,u_{n+1}\in A_1$, $v_1,\cdots,v_{m+1}\in B_1$ をとるとき、$u_1,\cdots,u_n, v_1,\cdots,v_m, u_{n+1}+v_{m+1}$ とおくと

$$\hat{u}_1 = \pm\,\hat{u}_1\cdot\hat{v}_{m+1},\quad \cdots,\quad \hat{u}_n = \pm\,\hat{u}_n\,\hat{v}_{m+1},\quad \hat{v}_1 = \pm\,\hat{u}_{n+1}\cdot\hat{v}_1,$$
$$\cdots,\quad (u_{n+1}+v_{m+1})^{\wedge} = \hat{u}_{n+1}\cdot\hat{v}_{n+1}$$

をえる。テンソル積との同型を用いれば、右辺の1次独立性は明らか。

しかし、一般に逆は成立しない。

命題1. A' を $\delta(A')>0$ の外積代数とする。このとき、$A\odot B$ は必ず非退化でない。

証明 $n=\delta(A)$, $m=\delta(B)$ とおき, $\varphi_1\in A_1\oplus B_1,\cdots,$ $\varphi_{n+m+1}\in A_1\oplus B_1$ をとり, $\varphi_j=u_j+v_j$ と $u_j\in A_1$, $v_j\in B_1$ により表わし, $\sum ku_j$ の底を $u_1,\cdots,u_r$ としよう. さて, A は外積代数だから, $r\leqq n=\dim A_1=\delta(A)$ である. $j>r$ について, $u_j=\sum_{i=1}^r\lambda_{ij}u_i$ と書こう. $\psi_j=\varphi_j-\sum_{i=1}^r\lambda_{ij}\varphi_i$ とおくと, $\dim\sum_{j=1}k\psi_j=\dim\sum_{j=1}k\varphi_j$ しかし, $\psi_{r+1}\in B_1,\cdots,\psi_{n+m+1}\in B_1$ であって, $n+m+1-(r+1)+1$ $=n+m-r+1\geqq m+1$. ゆえに,

$$\hat{\psi}_1=\psi_2\cdots\psi_{n+m+1}=\cdots\psi_{r+1}\cdots\psi_{n+m+1}=0.$$

これは, $\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_{n+m+1}$ が1次独立にならぬことを意味する.

さて, 代数多様体 V があって $A(V)$ としてえられる日輪代数を, 幾何的ということにしよう.

問題 日輪代数はいつ幾何的か?

例 $V=\mathbb{C}^{*n}-V(f)$ (f は既約) としよう. すると,

$A_1(V)=\sum k\,dx_j/x_j+k\,df/f$.

$df/f=\sum(x_j\partial_jf)e_j/f$, $e_j=dx_j/x_j$.

と表わされるから, $e_{n+1}=df/f$ として,

$\hat{e}_{n+1}=e_1\cdots e_n$ ($=\rho$ と記す),

$\hat{e}_j=x_j\partial_jf/f\,\rho$.

よって,

$\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_{n+1}$ が1次従属 $\Leftrightarrow$ $\sum a_j x_j \partial_j f = f$

$\Leftrightarrow$ f は準同次式.

従って,

$A(V)$ が非退化 $\Leftrightarrow$ f は準同次式でない,

が成立する.

上の $A(V)$ について $\Lambda^{\cdot}(A_1)/I \to A(V)$ となるイデアルは, $j < n+1$ について $I_j = 0$. そして $I_{n+1} = k$.

例2. V を $\mathbb{P}^n$ から超平面 $L_0, \cdots, L_q$ をとり去った残りとしよう. すると $A_j(V) = T_j(V)$ が成立つ (青本, Brieskorn)

§2. V, W を代数多様体とするとき、強有理写像 $\varphi: V \to W$ に対して $\varphi^*: A(W) \to A(V)$ が定まる。φ^* を $A(\varphi)$ とかくと、$(A(V), A(\varphi))$ は関手となる。さて、

φ が非常に一般でも $A(\varphi)$ は同型になりうる。

命題2 i) φ が支配的なら φ^* は単射。

ii) さらに $\bar{q}(V)=\bar{q}(W)$ なら φ^* は同型。

証明. i) は $T_i(W) \to T_i(V)$ がすでに同型なので自明。さて、ii) をみよう。$\bar{q}(V)=\bar{q}(W)$ により $A_1(W) \xrightarrow{\sim} A_1(V)$ である。$A_i(V)$ は $A_1(V)$ の元より生成されるから、自動的に $A_i(W)$ の像になる。

とくに $A(V)$ は固有(弱)双有理不変量である。さて、各 j につき $\bar{q}_j(V) = \dim A_j(V)$ とおこう。¯の意味は、$q_j(V) = \bar{q}_j(\bar{V})$ ($\bar{V}$ は V の完備化) とおきたいから、やはり対数的の形容詞の略である。

さて、V には準 Albanese 写像 $\alpha_V: V \to \mathcal{A}_V$ が存在したのだった。ここに $\mathcal{A}_V$ は V の準 Albanese 多様体をさす。V が非特異なら、α_V は正則。一般には α_V は強有理写像である。さて $\alpha_V(V)$ の $\mathcal{A}_V$ 内での閉包を B_V で示そう。すると、$\bar{q}(V) = \bar{q}(B_V) = \bar{q}(\mathcal{A}_V)$ であり、$\alpha_V: V \to B_V$ は支配的な強有理写像なのである。命題2が直ちに使えて、

$$A(B_V) \xrightarrow{\sim} A(V)$$

をえる。即ち、$A(V)$ を調べるには、準Abel多様体の閉部分多様体 V についてみればよいことがわかった。次の定理を提起しよう。

定理1（上野［　］）．V を準Abel多様体 $\mathcal{A}$ の閉部分多様体とし、$n = \dim V$ とおく。次の条件は同値。

a) V は準Abel多様体，

b)$_j$ $\bar{q}_j(V) = \binom{n}{j}$ 　$(1 \leq j \leq n)$，

c) $\bar{P}_m(V) = 1$，

d) $\bar{\kappa}(V) = 0$，

b)$_j^*$ $\dim A_j^\circ(V) = \binom{n}{j}$，

b)$_j^{**}$ $\bar{q}_j(V) = \binom{n}{j}$．

ここに $\bar{q}_j(V)$ は前に定義した通りであるが，$A_j^\circ(V)$ は次のように定義する。

$$A^\circ(V)_1 = \mathrm{Image}(T_1(\mathcal{A}) \longrightarrow T_1(V)) \subset A(V)_1.$$

$A^\circ(V)_1$ の生成する $A(V)$ の部分日輪代数を $A^\circ(V)$ とおく。これは無論 V の $\mathcal{A}$ への埋入にも依存する。

そして，V が一般に，単なる閉部分多様体ならば，各 b)，c) d) で $\geq$ が成立するのである。

証明はくり返さないが，b)$_j$ $\Rightarrow$ b)$_j^*$ （一般に $\dim A_j^\circ(V) \leq \bar{q}_j(V)$）だから，b)$_j^*$ $\Rightarrow$ a) をいえば，よく．原証明は

まさに $(j)^* \Rightarrow a)$ をいっていることに注意すればよい.

とくに, $V \subset \mathcal{A}$ かつ $n = \dim V$ なら, $\overline{a_n}(V) \geqq 1$ であって, $\delta(V) = n$ がわかる.

ゆえに次の命題をえる.

命題 3. $\delta(A(V)) = \dim B_V$.

従って, $\delta(A(V))$ を V の Albanese 次元とよぶこともできよう.

命題 4 $A(V_1 \times V_2) \simeq A(V_1) \odot A(V_2)$.

従って,

$$A(V_1 \times V_2)_j = \sum A(V_1)_{j-i} \otimes A(V_2)_i,$$

$$\overline{a}(V_1 \times V_2)_j = \sum_{i=0}^{j} \overline{a}(V_1)_{j-i} \cdot \overline{a}(V_2)_i.$$

定理 2. V を $\mathcal{A}$ の閉部分多様体とし, $\overline{\varkappa} = \overline{\varkappa}(V)$ とおく. すると, $\mathcal{A}$ のエタール被覆 $\pi : \mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$ が存在し $\pi^{-1}(V) = V'$ とおくと, $V' = \mathcal{A}_1 \times W \subset \mathcal{A}' = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ と直積に分解する. $\mathcal{A}_i$ はやはり準 Abel 多様体で, $W \subset \mathcal{A}_2$ は双曲型, かつ, $\dim \mathcal{A}_1 = n - \overline{\varkappa}$, $\dim W = \overline{\varkappa}$.

これを用いると,

$$A(V) \simeq A(V', \mathcal{A}') = \{T_1(W) \subset T_1(V') \text{ の生成する}\}.$$

さらに, $\mathscr{A}' = \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2$ によれば,

$$A(V', \mathscr{A}_1 \times \mathscr{A}_2) = A(\mathscr{A}_1) \odot A(W, \mathscr{A}_2)$$

になる.

従って, $\dim \mathscr{A}_1 = n - \bar{\kappa}(V) > 0$ ならば, $A(V)$ は非退化にならない. よって,

定理3. $V \subset \mathscr{A}$ があり,

$A(V)$ が非退化ならば, V は双曲型, 即ち $\bar{\kappa}(V) = n$.

が示された.

双曲型の W が準 Abel 多様体 $\mathscr{A}$ の閉部分で, かつ W が $\mathscr{A}$ を生成するとき $A(W, \mathscr{A})$ を双曲型ということにすれば, 一般の $A(V)$ は, 外積代数と, 双曲型の A の日輪積になるわけである.

もっとも, $A(W, \mathscr{A})$ などは, いささかしまりが悪いから次の定理2の変形を用いて, 書き易くしておこう.

定理2*. 条件は前定理と同じとしておく. 射影 $\varpi: \mathscr{A} \to \mathscr{A}_2'$ (準 Abel), $\varpi^{-1}(a) = \mathscr{A}_1$ があり, $\varpi|V : V \to W'$ と分解し, $V \subset \mathscr{A}$ が α_V なら $W' \subset \mathscr{A}_2'$ も $\alpha_{W'}$ となる. そして $\varpi^{-1}(a) = \mathscr{A}_1$. W' は双曲型で, $\varpi|V : V \to W'$ が, V の対数的標準ファイバー多様体.

これにより, $A(W, \mathscr{A}') = A(W')$ とする. かくて次の定理に到る

定理4. $A(V) = \Lambda(E) \odot A(W)$.

Eはベクトル空間，$\Lambda(E)$ はEの定める外積代数，Wは $\mathfrak{A}$ 内の双曲型多様体.

かくして，幾何的日輪代数の条件が一つ求まった．双曲型 $A(W)$ の代数的特徴づけが次の問題になる．非退化であればよいわけだが，これがどの位必要かは勿論わからない．

§3. V を $\mathcal{A}$ の n 次元閉部分代数多様体とするとき、$A_n(V)$ の代数幾何的意味を考察しよう。

$X=\mathcal{A}$ とおき $\bar{X}$ を $\mathcal{A}$ の標準完備化とする。$\bar{V}$ を V の $\bar{X}$ 内での閉包とする。さて、$\bar{X}$ に2次変換（モノイダル変換をこうよぶ）をとり返し、次の図式をえる

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & X \arrow[r, phantom, "\subset"] & \bar{X} \\
& \bar{V} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \\
& & \\
V^* \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & X^* \arrow[r, phantom, "\subset"] & \bar{X}^* \\
& \bar{V}^* \arrow[ur, phantom, "\subset"] \arrow[uu, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mu:\bar{X}^*\longrightarrow\bar{X}$ は双有理正則，V^*, X^* は V, X の強変換，かつ，$\bar{V}^*$ は V^* の $\bar{X}^*$ 内での閉包．さて，μ をうまくえらぶと，$\bar{V}^*$ も非特異 $D^*=\bar{V}^*-V^*$ は単純正規交叉型因子にできる．

$$A(V)_n = A(V^*)_n \subset H^0(K^*+D^*),$$

(ここに $K^* = K(\bar{V}^*)$ は標準因子) の定める $|K^* + D^*|$ の部分1次系があるなら それを $\mathbb{L}(V^*)$ で示す.

$\mathbb{L}(V^*)$ は V^* の日輪代数に付属した1次系，略して V^* の日輪1次系という. 英語でかくと

solar (linear) system of V^*

である. 即ち, 太陽系みたいにきこえるものができた.

$\mathbb{L}(V^*)$ の定める有理写像 $\Phi : \bar{V}^* \longrightarrow \mathbb{P}^{\bar{a}_n - 1}$ を日輪写像 (solar map) とよぶ. $W = \Phi(\bar{V}^*)$ とおくと, この一般ファイバーの連結成分は著しい特長をもつのである.

さて,

$$
\begin{tikzcd}
\bar{V} & \bar{V}^* \arrow[l, "\mu"'] \arrow[ddr, "\Phi"] & \\
\cup & \cup & \\
V \arrow[rr, bend right] & V^* \arrow[l, "\mu"'] & W \subset \mathbb{P}^{\bar{a}_n - 1}
\end{tikzcd}
$$

次のようにして, 支配的有理写像 $\Phi\mu^{-1} : V \longrightarrow W$ をえる.

$\psi = \Phi \cdot \mu^{-1}$ とかき $\psi : V \longrightarrow W$ を V の日輪写像という.

$w \in W$ を W の一般の点とする. $\Phi^{-1}(w)$ は一般に非連結であり, その連結成分を $\bar{\Gamma}_w^*$ とかく。 $\Gamma_w^* = \bar{\Gamma}_w^* \cap V^*$ とおくと, これは V^* の閉部分多様体であり $\mu|V^*$ は固有正則なので, $\Gamma_w = \mu(\bar{V}_w^* \cap V^*)$ も V の閉部分多様体である.

さて、Γ_ω は準Abel多様体か？

このことは、結局証明できなかった。正しいとすると、すべてが旨くいきすぎるのではあるが、十分考えている余裕がないから何ともいえない。

$A_n(V)$ の考察から、次のことも考えてみた。

1-形式の空間 $T_1(V)$ の底 $\omega_1,\cdots,\omega_q$ をとり、$n=\dim V$ とするとき $\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n\neq0$ にとれたとしよう。

$\mathcal{J}=\{I\subset\{1,\cdots,q\};\#I=n\}$ とおき、$I\in\mathcal{J}$ に対して、$\omega_I=\bigwedge_{i\in I}\omega_i$ とおくと、$\omega_I=\rho_I\,\omega_{[1,\cdots,n]}$ として、有理関数 ρ_I が定まる。

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{P}^{\rho} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ p & \longmapsto & (\cdots:\rho_I:\cdots) \end{array}$$

とおくと、一つの有理写像をえる。これは、実質上前の王と同じになる。このような有理写像の詳しい研究は是非とも望まれる。

そして、次の事も、一般に検証できなかった。

問題 $V\subset\mathcal{A}$ が双曲型のとき $A(V)$ は非退化か？

これは、落合・野口の問である。