

Title	アーベル積分とその原始積分について (幾何学における大域的解析学)
Author(s)	斎藤, 恭司
Citation	数理解析研究所講究録 (1978), 321: 79-87
Issue Date	1978-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/104017
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

アーベル積分と、その原始積分について、

東大理 斎藤恭司

§0.

有理数体上、代数的関係を持たない様な数が、超越数であり、有理函数体上、代数的関係を持たない様な函数が、超越函数である。この定義は、非常に簡単だが、実際に我々などの位、超越的なものを知っているかとなると、おしな限られたものであるのに驚く。特に、多変数の超越的函数については、未だ、興味ある函数の例が充分にはない様に思われる。

一方、知られている様な、超越的なものの中で、一連の興味ある系列がある。(これ等は、どちらかという、易い方のものであるが。) 具体的に言うと、数では、 π (円周率)、函数では、三角函数 (指数函数)、楕円函数、 η -函数、等々... である。

これ等の数や函数の意味は、いろいろ有ろうが、ここでは以下の様に、解析的見地をとってみる。(係数体は \mathbb{R} または \mathbb{C})

まず、2変数多項式 $f(x, y)$ を考える。その零点集合は、

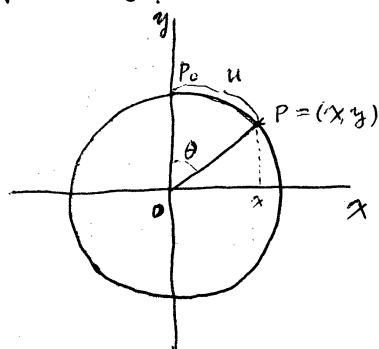
/

デカルト平面内のある曲線 C を定める。 C 上の点 P は、デカルト座標 (x, y) で表示される。ここで、 y は x の代数函数となつてはいるが、この座標 (x, y) はあまりに“外的”の様に思える。もっと、 C に則しての、内的な C の点のパラメータ表示は存在だろうか。例へば、 C 上の1点 P_0 を固定して、そこから点 P までの弧長を測るのはどうか。

例(1) 半径 r の円 $f(x, y, r) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

すると点 P_0 から P までの弧長 $u(x)$ は

$$u(x) = \int_0^x \frac{r dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$



よく知られている様に、この積分の逆函数 $x = \varphi(u)$ は、

(周期 $2\pi r$ の) 正弦函数となる。

特に上記の積分を x の critical point (つまり f と $\frac{\partial f}{\partial x}$ の共通根) $x = \pm r$ まで積分した値 $\frac{u(r)}{r}$ は、 r の函数として、次の2階の微分方程式を満たす事が、上記の積分表示から分る。

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) = 0$$

従つて $u(r)$ と r は比例関係にあるが、その比例定数は、 $u(r)/r = \frac{\pi}{2}$ であり、この数は超越数である事が知られている。言い換えると、デカルト座標で、円の大きさを表わした、半径 r と、“弧長座標” u (x, y)

これに代って、次の無限級数関係 $\frac{1}{r^2} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nu)^2}$ が成り立つ!!

で測られた、円周の大きさ、 $2\pi r$ の間には、^{整係数}代数的関係がある。

(2) もう一つの例を見てみよう。レムニスケートの弧長を測る事に、端を發した楕円積分は、曲線 $C: y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ に対して、次の様な積分を考える標準型 (Weierstrass) がある。

$$1) \quad u(x) = \int_{\infty}^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

この積分の逆函数 $x = p(u)$ は、楕円函数としてよく知られている。

2) 上記の積分において、特に x をその critical point (つまり $4x^3 - g_2x - g_3 = 0$ の三根 x_1, x_2, x_3 のいずれか)

まで積分した値 $u(x_i)$ は、 g_2, g_3 の函数として、1) の積分表示と、その部分積分を用いる事により、2階の全微分方程式系を満す。ここでは、その具体形を書かずに、discriminant $\Delta = 27g_2^3 - g_3^2 = 0$ に延びて、log pole を持つ (定義は後出) 方程式となり、本質的には、Gauß の超幾何微分方程式となる。

1) 上記の critical 点積分 $u(x_i)$ ($u(x_1), u(x_2), u(x_3)$ の間に、或る有理係数^数1次関係式が成り立つので本質的には2つの函数とみえる。) は、積分1) の(半)周期と呼ばれるが独立な二つ $u(x_1), u(x_2)$ と、もともとのデカルト座標の形で、曲線の形を決めていたパラメータ g_2, g_3 の間には、または代数的な関係は、存在せずに、(2) の微分方程式の解の逆写

像を考え) g_2, g_3 を $u(x_1), u(x_2)$ で表示すると、それは、

$$g_2 = \frac{15}{4} \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(nu_1 + mu_2)^4}, \quad g_3 = \frac{35}{16} \sum_{(n,m) \neq (0,0)} \frac{1}{(nu_1 + mu_2)^6}$$

なる無限有理級数表示 (Weierstrass による Eisenstein 級数) となる。

以上の例から、大雑把に言って次の事が想像されよう。

一般にパラメータ $g = (g_1, \dots, g_r)$ を含む、曲線の族 $C_g: f(x, y, g) = 0$

に対し、その曲線上の適当な積分 $u = \int \xi(x, y)$ をとると、

イ) u は変数 g に関する多価函数として、(2階の) 微分方程式の解となる。

ロ) 逆に、 $\frac{1}{g}$ を積分 u で表示するには、無限有理級数表示を要する。(その函数はモジュラー函数となる。)

この様相の理論で、もっともよくい、右例の一つとして、Riemann による、Jacobi の逆問題への一般的解答が、考えられる。Riemann は、まず^{複素}曲線に、 ∞ 遠点をいくつか付加する事により、曲線をコンパクト化した面 (Riemann 面) を考え、その上で、致る所、正則な微分 (第一積ア-ベル微分) を積分した。

よく知られている様に、Riemann 面の示性数を p とすれば、曲面上 1 次独立な^{1次元} cycles は $2p$ 個 $\gamma_1, \dots, \gamma_{2p}$, 第一積微分は p 個

ζ_1, \dots, ζ_p がある。週期行列 $(\int_{\gamma_i} \zeta_j)_{\substack{i=1, \dots, 2p \\ j=1, \dots, p}}$ は $\int_{\gamma_i} \zeta_j = \delta_{ij}$

と normalize しておくと $Z = (\int_{\gamma_i} \zeta_j)_{i,j=1, \dots, p}$ は対称行列となり、Riemann

面上の有理函数数は、 \mathcal{O} -函数 $\mathcal{O}(u, Z)$ を用いれば、 $\mathcal{O}(\int_{\gamma_i} \zeta_j + a, Z)$

なるものの適当な比でかける。又 Torelli の定理によれば、行列 Σ は、元の Riemann 面の等角同値類を unique に決める。

しかし、ここで、新たな問題が生じる。p 次対称行列 Σ の自由度は $\frac{p(p+1)}{2}$ であるのに対し、一般に、示性数 p の Riemann 面の moduli の次元は $3p-3$ であるので、両者の間に、直接的な関係は望めない。むしろ、先の例 1, 2, の場合の様に τ と $u(\tau)$, g_2, g_3 と u_1, u_2 の間にあった無限有理線数関係は、“幸運な例外”であった様にも思われる。この事態をどう考えたらよいだろうか。

一つの考え方はこうである。曲線族 $f(x, y, g) = 0$ に対し、上記の $\frac{p(p+1)}{2}$ 個の積分 $\int_{\gamma_j} \omega_j$ は、そもそもすべて g の函数として互に独立なわけである。従って何らかの理由で、 $p(p+1)/2$ 個の積分中、或る特別な積分、 $u_1(g), \dots, u_2(g)$ を分離できれば、我々は、パラメーター g_1, \dots, g_2 と、積分 u_1, \dots, u_2 の関係を調べればよい。特に g_1, \dots, g_2 は u_1, \dots, u_2 の係型函数になるであろう。実際、この様な考え方に基いて、Picard (1884) や 志村 (1963) は或る虚数乗法的作用を持つ曲線族に対し、係型函数 $g = E(u)$ を得た。

次に述べるのが、本稿の主要テーマとなる原始積分という考え方である。まず、話しを Riemann 以前にもどし、曲線 $C_g: f(x, y, g) = 0$ をコンパクト化する。(おいてそれは或るコンパクト Riemann 面 - 有限個の ∞ 点と見なす。) 又考える。微分 ω も、

C_g 上では holomorphic でも ∞ -点では pole を持つ事にする。(その様な微分は一般に μ 2 種, μ 3 種 微分と呼ばれている。)

実際に例 1 では Riemann 球 $\{2g$ の ∞ -点 $\}$ に homeo 存曲線上、で、無限遠点で μ 丁度 1 位の極のを持つ微分 $\zeta = \frac{rdx}{\sqrt{12-x^2}}$ を積分している。

すると、曲線 C_g 上独立な 1-cycle の $\gamma_1, \dots, \gamma_\mu$ ($\mu = 1$ 次元 betti 数)
($\mu \geq 2g$)
に対し 全部で丁度 μ 個の 1 次独立な微分 $\zeta_1, \dots, \zeta_\mu$ とれ (

代数的な de-Rham Theorem による) よって 週期行列 $(\int_{\gamma_i} \zeta_j)_{i,j=1,\dots,\mu}$ が考えられる。しかし、このままでは、週期行列の成分の個数は μ^2 個だが、^(一般に) パラメータ $g = (g_1, \dots, g_\ell)$ の自由度 ℓ よりもはるかに大きな数となってしまい、状況は、かえって悪くなる様に見える。

ところがもし、或る特別な微分 ζ_0 (g に depend する) 及び、

パラメータの空間上のベクトル場 $\delta^{\pm} = \sum_{k=1}^{\ell} a_k^{\pm}(g) \frac{\partial}{\partial g_k}$, $j=1, \dots, \mu$

が存在して、 $\int_{\gamma_j} \zeta_i = \delta^{\pm} \int_{\gamma_j} \zeta_0$ と書けるならば、積分 $\int_{\gamma_j} \zeta_0$

は、週期行列の原始函数 (あるいはポテンシャル) とする事に

なり、問題はすつと簡明化する。 $\int_{\gamma_j} \zeta_0$ の事を原始積分と呼ぶ事にすれば、我々は、 μ 個の ^(原始) 積分 $u_1 = \int_{\gamma_1} \zeta_0, \dots, u_\mu = \int_{\gamma_\mu} \zeta_0$ と

ℓ 個のパラメータ g_1, \dots, g_ℓ の間の関係を調べればよい事となる。

本稿の主定理は、ある状況下では、この様な原始積分が存在

する事を示す。更にその時は $\mu = \ell$ となって 2 つの変量 g

と u の間の関係も、定まる。

もう少し、具体的には、次の通り。 $f(x_0, \dots, x_m)$ を \mathbb{C}^{m+1} で定義

された、多項式又は、正則函数とし、 $f^{-1}(0) := X_0$ は原点 $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ のみで、特異な多様体とする。 f の

perturbation でも、とも、universal なものは、次の様なもので与えられる。

(Thom, Arnold)

$$F(x, g_1, \dots, g_\mu) = f(x) + g_1 + g_2 \varphi_2(x) + \dots + g_\mu \varphi_\mu(x)$$

ただし、 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ は $\mathbb{C}\{x_0, \dots, x_n\} / (\frac{\partial f}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ の \mathbb{C} -base を与える函数

すると μ 次元の parameter $g \in (g_1, \dots, g_\mu) \in \mathbb{C}^\mu$ のうち、曲面 $X_g: F(x, g) = 0$ が、smooth に存する様な g の全体は、余 1 次元の部分多様体 $D \subset S$ に存している。 D を discriminant と呼ぶ。 Milnor 等の定理によると、1 方パラメータ g が D に属してなければ、曲面 $X_g: F(x, g) = 0$ は、(原点の近くで) 丁度 μ 個の独立な n 次元ホモロジーサイクルを持っている。

そのホモロジーサイクルの dual として、 X_g 上の holomorphic な n -form で、パラメータ g に正則に depend するもの全体の或る同値類として、

$$\mathcal{H} = F_* \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}/S}^n / dF \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}/S}^{n-1} + \sum_{i=1}^{\mu} dg_i \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}/S}^{n-1} + d \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}/S}^{n-1} + F_* \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}/S}^n$$

を考えると、これは rank μ の \mathcal{O}_S -module となり、要するに \mathcal{H} の元々は、各 X_g 毎に n -form を定め、先のミルナーのサイクルと dual になる。

さて一方、 μ 次元のパラメータの空間 S 上の正則なベクトル場で、discriminant D に接する様なものを、代数型ベクトル場と呼んで、その全体を $\text{Der}_S(\log D)$ と記す事にしよう。 $\text{Der}_S(\log D)$ は、 \mathcal{O}_S -module として、free で rank μ とする事も出来る。

以上の下に、次の定理が得られる。

定理 $f, F, \mathcal{H}, \text{Der}_S(\log D)$ 等は上記の通りとする。

この時、次の様な s_0, Θ が存在する。

i) $s_0 \in \mathcal{H}$ ii) $\Theta: \text{Der}_S(\log D) \rightarrow \mathcal{H}$: \mathbb{C}_S -module と (7) isomorphism

s.t. i) $\gamma(g) \in H_n(X_g, \mathbb{Z})$ を g に horizontal に depend する n 次元 cycle の任意の族とすると

$$\delta \left(\int_{\gamma(g)} s_0 \right) = \int_{\gamma(g)} \Theta(\delta) \quad \text{for } \forall \delta \in \text{Der}_S(\log D)$$

ii) e^1, \dots, e^m を $\text{Der}_S(\log D)$ の \mathbb{C}_S -base とすると、 S 上 holomorphic な函数 $P_{\ell}^{jk}(g)$ $j, k, \ell = 1, \dots, m$ が存在し

$$\delta^j \delta^k \left(\int_{\gamma(g)} s_0 \right) + \sum_{\ell} P_{\ell}^{jk} \delta^{\ell} \left(\int_{\gamma(g)} s_0 \right) = 0 \quad \text{for } j, k = 1, \dots, m$$

(但し P_{ℓ}^{jk} は $\gamma(g)$ によるない。)

(この ii) の結果は、 \exists する $\Omega_S^1(\log D) (= \text{Der}_S(\log D))^*$ 上の connection ∇^* があって $\nabla^* d \int_{\gamma(g)} s_0 = 0$ とする。とでも言い換えられる。)

$s_0, \Theta, \delta^j, P_{\ell}^{jk}$ 等も、と具体的に計算できるが、ここでは、これ以上、立ち入らない。例えば、例1において $f = x^2 + y^2$ とおいた時の原始積分 $s_0 = \frac{1 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ であり、例2では、 $f = 4x^3 - y^2$ に対する原始積分が $s_0 = \frac{9x}{\sqrt{4x^3 - y^2}}$

となる。一般に n 変数 ($n=1$) の時、 $S_0 = \frac{dx}{2\pi y}$ とする。

以上の状況の下で、 $g=(g_1, \dots, g_n)$ は $u_1 = \int_{g_1} S_0, \dots, u_n = \int_{g_n} S_0$ の automorph 函数として、無限有理函数展開を持つだろうと思われるが、残念なから、未だ、一般的証明はない。

例へば、 u が有理数も有理数で近似できるが、その近似有理数の分母の挙動により、近似される数が、(超越) 的になったり代数的になったりすると考えられる。一変数函数論の Range の定理によれば、 \mathbb{C} の領域で正則な函数は有理函数で近似できる。同様に多変数 $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ の領域でも、正則領域では、有理近似定理が成立する。すなわち、擬凸領域における、1) の問題の解は、ある意味で、その領域で正則な函数は、その領域の境界に接する面に極を持つ様な有理型函数で近似できる事を示している。

対応して例 1) では $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

例 2) では $g_2 = \frac{15}{4} \sum \frac{1}{(nu_1 + mu_2)^4}, g_3 = \frac{35}{16} \sum \frac{1}{(nu_1 + mu_2)^6}$

なる有理近似が可能であった。上記の定理の場合も、同様にある (無限) 系 $V \subset H_n(X^*, \mathbb{Z})$ を用いて、Eisenstein 級数

$$E(u_1, \dots, u_n, k) = \sum_{\gamma \in V} (u_\gamma)^{-2k}$$

を考える事ができるが、残念なから、この級数については、未だよく分らない。

以上の事について、詳しくは、論文を準備中なので、資料を参照下さい。