数理解析研究所講究録
321巻 1978年 34-59

保型函数の微分方程式

名大・理　寺西 鎮男

$\mathcal{D}$を$\mathbb{C}$の領域とし、Γを$PSL(n+1,\mathbb{C})$の discrete な部分群で、Γに関する、保型函数体が、超越次数がnの体であると仮定する。この時、次の定理が成立する。これは、$n=1$の時 Hurwitz の定理として、よく知られている。

<u>定理</u>；任意の、Γ-保型形式は、order が高々$2n+1$の、代数的微分方程式を、満足する。

$\mathcal{D}$内で、次の型の、rank $n+1$の、完全積分可能な、方程式系

$$L_{ij}(P|\tau,y) = \frac{\partial^2 y}{\partial\tau_i\partial\tau_j} + \sum_{\alpha=1}^{n} P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau)\cdot y = 0 \quad (1\le i,j\le n,\ 1\le\alpha\le n)$$

の、一組の基本解、$\varphi_0(\tau),\varphi_1(\tau),\cdots,\varphi_n(\tau)$の Wronskian が non-zero な constant の時、微分方程式系、$L_{ij}(P|\tau,y)=0$ $(1\le i,j\le n)$ は、半標準形と呼ばれる。これについて、次の事が成り立つ、

<u>定理</u>；$\tau_1(z),\cdots,\tau_n(z)$が、定数でない、$\Gamma$-保型函数で、代数独立であるとすると、$z=(z_1,\cdots z_n)\in\mathcal{D}$の各成分$z_i$は、

半標準形、$L_{ij}(p|\tau, y) = 0$ $(1 \leq i \leq j \leq n)$ の基本解、$\varphi_0(\tau), \cdots \varphi_n(\tau)$ を用いて、$z_i = \varphi_i(\tau)/\varphi_0(\tau)$ $(1 \leq i \leq n)$ として、表わす事ができ、更に、$g_{ij}^{(\alpha)}(\tau)$ で、$\alpha = 0$ の時、$P_{ij}^{(0)}(\tau)$, $\alpha \neq 0$ の時、$\tau_\alpha P_{ij}^{(0)}(\tau) + P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)$ を表わす事にすれば、$f_\alpha(\tau) = \det(g_{ij}^{(\alpha)}(\tau))$ $(\alpha = 0, 1, 2, \cdots n)$ 達は、全て、τ の代数函数である様にできる。

§1, 半標準形、及び、標準形

二階の完全積分可能な rank $n+1$ の微分方程式系

$$L_{ij}(p|\tau, y) = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^{n} P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau) y \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

で、独立変数 $\tau = (\tau_1, \cdots \tau_n)$ と従属変数 $y(\tau)$ の変換の、pseudo-group G を次の様に定義する。

<u>Def. 1.1</u> $G = \left\{ \rho_{u,\lambda} : (\tau, y) \longrightarrow (u(\tau), \lambda(\tau) y), \det\left(\frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau}\right) \neq 0 \right\}$

G_1, G_2, で G の次の部分群を表わすものとする。

$G_1 = \{ \rho_{id,\lambda} \}$, $\quad G_2 = \{ \rho_{u,1} \}$

<u>Lemma 1;1</u>

$$\left(\frac{\partial^2 y \cdot \lambda(\tau)}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(z) \frac{\partial (y \cdot \lambda)}{\partial z_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(z) y \cdot \lambda \right)$$

$$= \lambda \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta}\right)^t \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 (\tau_\alpha \cdot \lambda)}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\tau_\alpha \partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j} + \lambda \sum_\ell P_{ij}^{(\ell)}(z) \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial z_\ell} \right) \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + y \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j} + \sum_{\alpha=1}^{n} P_{ij}^{(\alpha)}(z) \frac{\partial \lambda}{\partial z_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(z) \lambda \right)$$

<u>proof.</u>

$$\frac{\partial^2 y \cdot \lambda}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\left(\sum_\alpha \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial z_j} \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} \right) \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot y \right)$$

$$= \left(\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \tau_\beta}{\partial z_i} \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial z_j} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta} \right) \cdot \lambda + \sum_\alpha \frac{\partial^2 \tau_\alpha}{\partial z_i \partial z_j} \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} \cdot \lambda$$

$$+\sum_{\alpha}\frac{\partial\lambda}{\partial z_i}\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_j}\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial z_j}\cdot y+\sum_{\alpha}\frac{\partial\lambda}{\partial z_j}\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha}$$

$$=\Big(\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial\tau_\beta}{\partial z_j}\frac{\partial^2 y}{\partial\tau_\alpha\partial\tau_\beta}\Big)\lambda+\sum_{\alpha}\Big(\frac{\partial^2\tau_\alpha}{\partial z_i\partial z_j}\lambda+\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial\lambda}{\partial z_j}+\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_j}\frac{\partial\lambda}{\partial z_i}\Big)\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha}+\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial z_j}y$$

ところで、

$$\frac{\partial^2\tau_\alpha}{\partial z_i\partial z_j}\lambda+\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial\lambda}{\partial z_j}+\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_j}\frac{\partial\lambda}{\partial z_i}=\frac{\partial^2(\tau_\alpha\cdot\lambda)}{\partial z_i\partial z_j}-\frac{\tau_\alpha\,\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial z_j}$$ だから、結局、

$$\frac{\partial^2 y\cdot\lambda}{\partial z_i\partial z_j}=\Big(\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial\tau_\beta}{\partial z_j}\frac{\partial^2 y}{\partial\tau_\alpha\partial\tau_\beta}\Big)\lambda+\sum_{\alpha}\Big(\frac{\partial^2(\tau_\alpha\cdot\lambda)}{\partial z_i\partial z_j}-\frac{\tau_\alpha\,\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial z_j}\Big)\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha}+y\cdot\frac{\partial^2\lambda}{\partial z_i\partial z_j}$$

この式と、$\frac{\partial}{\partial z_i}y\cdot\lambda=\sum_{\alpha}\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha}\cdot\lambda+y\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial z_i}$ に注意すれば、Lemma の等式が得られる。　q.e.d //

次に psudo group G の $P_{ij}^{(\alpha)}$ への作用を定義しよう。

<u>Def.</u> 1.2

$$L(\rho^*_{z,\lambda}(P)\,|\,\tau,y)=\frac{1}{\lambda}\Big(\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big)^{-1}L(P(z)\,|\,z,\lambda y)\,{}^t\Big(\frac{\partial\tau}{\partial z}\Big)^{-1}$$

ここで、$L(P|\tau,y)$ は、(i,j) 成分が、$L_{ij}(P|\tau,y)$ の $n\times n$、対称行列を表わすものとする。

前の Lemma から、$L(\rho^*_{z,\lambda}(P)|\tau,y)$ は、$L(P|\tau,y)$ と同一の type の system である。

$L(\rho^*_{z,\lambda}(P)|\tau,y)=L(P^*(\tau)|\tau,y)$ とする時、G の $P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)$ への作用を、$\rho_{z,\lambda}(P_{ij}^{(\alpha)}(\tau))=P_{ij}^{*(\alpha)}(\tau)$ によって定義する。

<u>Def.</u> 1.3

rank $n+1$ の完全積分可能な微分方程式系の一組の、基本解 $\varphi_0(\tau),\cdots\varphi_n(\tau)$ の、Wronskian が non-zero な constant であるとき、その微分方程式系を、半標準形と言う。

即ち、 $L_{ij}(p|\tau, y)$ $(1 \leq i, j \leq n)$: 半標準形

$$\Longleftrightarrow \quad W(\varphi_0, \cdots \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_0, & \cdots & \varphi_n \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} : \text{non. zero const.}$$

<u>prop.</u> rank $n+1$ の 完全積分可能な、微分方程式系は、G_1の作用で、半標準形にする事ができる。

上の、prop. は、吉田　　氏による。なお、この prop. の 1 つの一般化については、Appendix 1. を参照の事、

<u>Def.</u>

rank $n+1$ の完全積分可能な微分方程式系 $L_{ij}(p|\tau, y)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ で、$P_{ij}^{(\alpha)} = 0$ $(0 \leq \alpha \leq n,\ 1 \leq i, j \leq n)$ の時、$L_{ij}(p|\tau, y)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ は、標準形であると言う。

<u>prop. 1.1</u> 完全積分可能な微分方程式系 (rank $= n+1$) は、G の作用で、標準形にする事ができる。

<u>proof.</u> Lemma [1.1] により、次の関係式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2 y \cdot \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha} P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial (y\lambda)}{\partial \tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau) \cdot y \cdot \lambda \right)$$

$$= \lambda \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right)^t \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right) + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 (z_\alpha \cdot \lambda)}{\partial \tau_i \partial \tau_j} - \frac{z_\alpha \partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \lambda \sum_{\ell} P_{ij}^{(\ell)} \frac{\partial z_\alpha}{\partial \tau_\ell} \right) \frac{\partial y}{\partial z_\alpha}$$

$$+ \ y \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha} P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau) \lambda \right)$$

この関係式で、$\lambda, z_1\lambda, \cdots z_n\lambda$ が、微分方程式系 $L_{ij}(p|\tau, y)$ $(1 \leq i, j \leq n)$ の一組の、基本解となる様に、$\lambda, z_1, \cdots z_n$ を定める。

この時、

$$\frac{\partial^2(z_\alpha\cdot\lambda)}{\partial\tau_i\partial\tau_j} = -\sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\, z_\alpha \frac{\partial\lambda}{\partial\tau_\alpha} - \sum_\alpha P_{ij}^{(\ell)}(\tau)\,\lambda\,\frac{\partial z_\alpha}{\partial\tau_\ell} - P_{ij}^{(0)}(\tau)\, z_\alpha\cdot\lambda$$

$$z_\alpha \frac{\partial^2\lambda}{\partial\tau_i\partial\tau_j} = -\sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\, z_\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial\tau_\alpha} - z_\alpha P_{ij}^{(0)}(\tau)\,\lambda$$

となる事に注意すれば、$\dfrac{\partial^2(z_\alpha\lambda)}{\partial\tau_i\partial\tau_j} - \dfrac{z_\alpha\partial^2\lambda}{\partial\tau_i\partial\tau_j} + \lambda\sum_\ell P_{ij}^{(\ell)}(\tau)\dfrac{\partial z_\alpha}{\partial\tau_\ell} = 0$

従って、次の matrix relation を得る。

$$\left(\frac{\partial^2 y\cdot\lambda}{\partial\tau_i\partial\tau_j} + \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\frac{\partial(y\cdot\lambda)}{\partial\tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau)\, y\cdot\lambda\right) = \lambda\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z_\alpha\partial z_\beta}\right)^t\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)$$

q.e.d.//

Def. 1.5

$z = (z_1, \cdots, z_n)$, $\tau = (\tau_1, \cdots \tau_n)$

$$\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}\left(\tau_\alpha\cdot J^{\frac{1}{n+1}}\right) - \tau_\alpha\frac{\partial^2 J^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i\partial z_j} \quad (\alpha = 1,\cdots n)$$

$$\{z,\tau\}_{ij}^{(0)} = \frac{\partial^2 J^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i\partial z_j}$$

（ただし、$J = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial\tau_1}, & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial\tau_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_n}{\partial\tau_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial\tau_n}\end{vmatrix}$ ）

$\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1,2\cdots n)$ は、PSL$(n+1)$ の Schwarzian derivative と呼ばれている物と、本質的に同じである。$\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ 達の、定義から、全ての $\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1,2\cdots n)$ について、$\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}=0 \Leftrightarrow$ z が、τ の、projective liner transformation、$\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ の変換法則は、Lemma [1] を用いれば、簡明に、出す事ができる。即ち、Lemma [1] より、

$$\frac{\partial^2\varphi(\tau)J^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i\partial z_j} = \left(\sum_{\alpha\beta}\frac{\partial\tau_\alpha}{\partial z_i}\frac{\partial\tau_\beta}{\partial z_j}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_\alpha\partial\tau_\beta}\right)J^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^n\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\alpha} + \varphi\{z,\tau\}_{ij}^{(0)}$$

$f(z)=\varphi(\tau)\det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ とおく時、

$$\left(\frac{\partial^2 f(z)\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\partial w_i\,\partial w_j}\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i\,\partial z_j}\right)^t\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\{w,z\}_{ij}^{(\alpha)}\right)\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}+f\left(\{w,z\}_{ij}^{(0)}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i\,\partial z_j}\right)=\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i\,\partial \tau_j}\right)^t\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)\det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha}+\varphi\left(\{z,\tau\}_{ij}^{(0)}\right)$$

ところで、 $\dfrac{\partial^2 f(z)\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\partial w_i\,\partial w_j}=\dfrac{\partial^2 \varphi(\tau)\det\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\partial w_i\,\partial w_j}$ である。

以上の事から、次の prop. が得られる。

<u>prop. 1.2</u> $f(z)=\varphi(\tau)\det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ とおく時、

$$\left(\sum_\alpha\{w,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\alpha}+\varphi\{w,\tau\}_{ij}^{(0)}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\left(\sum_\alpha\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\alpha}+\{z,\tau\}_{ij}^{(0)}\varphi\right)^t\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$+\left(\sum_\alpha\{w,z\}_{ij}^{(\alpha)}\frac{\partial f}{\partial z_\alpha}+f\{w,z\}_{ij}^{(0)}\right)$$

次に、後で、使う為に、少し別の型の、Schwarzian derivative の一般化を考える。$\varphi(\tau)$ の τ に関する Hessian を $\mathrm{Hess}_\tau(\varphi)$ で表わす事にする。$\{z,\tau\}_\varphi$ を次の式によって定義する。

<u>Def. 1.6</u> $\mathrm{Hess}_z\left(\varphi(\tau)\cdot j^{\frac{1}{n+1}}\right)=j^{-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}\left(\mathrm{Hess}_\tau\varphi+\{z,\tau\}_\varphi\cdot\varphi\right)$

(但し、 $j=\det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)$)

次の Lemma は、$\{z,\tau\}_\varphi$ が、1変数の場合の、classical な、Schwarzian derivative の拡張になっている事を示している。なお、別の変換群が作用している、空間での $\{z,\tau\}_\varphi$ の、拡張については、Appendix 2 を参照の事。

Lemma 1.2

(1) z が τ の projective linear transformation の時、

$$\{z,\tau\}_\varphi = 0$$

(2) $\{\sigma(z),\tau\}_\varphi = \{z,\tau\}$ （但し、$\sigma\in PSL(n+1)$）

(3) $\varphi(\tau) = \mu(w)\det\left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^{-\frac{1}{n+1}}$ とおく時、

$$\{z,w\}_\mu = \{\tau,w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}\{z,\tau\}_\varphi$$

(4) $\{\tau,w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}\{w,\tau\}_\varphi = 0$

proof.

(1) は、z が τ の1次分数変換の時には、

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi(\tau) J^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i\partial z_j}\right) = \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_i\partial\tau_j}\right)^t\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right) J^{\frac{1}{n+1}}$$ が成り立つ事から

明らかである。　次に(3)を証明する。

$$Hess_z\left(\varphi\cdot\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}\right) = \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{1+\frac{1}{n+1}}\left(Hess_w\varphi(\tau) + \{z,w\}_{\mu(w)}\cdot\mu\right)$$

一方、$\varphi\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}} = \mu\cdot\det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}$

従って、$Hess_z\left(\varphi(\tau)\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}\right) = \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{1+\frac{1}{n+1}}\left(Hess_w\mu(w) + \{\tau,w\}_\mu\mu\right.$

$$\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}\{z,\tau\}_\varphi\cdot\mu\right\}$$

よって、$\{z,w\}_\mu = \{\tau,w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}\{z,\tau\}_\varphi$

(2) は、(3) で $z=\tau$ の1次分数変換とおけば、(1)により

$$\{\sigma(\tau),w\}_\mu = \{\tau,w\}_\mu \quad \sigma\in PSL(n+1)$$

(4) は、(3) で、$z = w$ の1次分数変換とおけば、

$0 = \{\tau,w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial\tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}\{\sigma(w),\tau\}_\varphi$　(2) を用いれば、

(4) が得られる。　　q.e.d.

Lemma 4.3 Γ を $PSL(n+1)$ の部分群として. $\varphi(\tau)$ が,

$$\varphi(\sigma\tau) = \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}\varphi(\tau) \quad {}^{\forall}\sigma\in\Gamma$$ をみたすとする。

$$[z,\tau]_{\varphi(\tau)} = \{z,\tau\}_{\varphi(\tau)}(d\tau_1\wedge\cdots\wedge d\tau_n)^{+\frac{n+3}{n+1}}$$ とおけば,

$$[z,\sigma\tau]_{\varphi(\sigma\tau)} = [z,\tau]_{\varphi(\tau)}$$

proof.

Lemma [1.2] の (4) から, $\{z,\sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} + \{\sigma\tau,z\}_{\varphi(\sigma\tau)\det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}}\cdot\det\left(\frac{\partial\sigma\tau}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}$

$=0$, ところで, 仮定より, $\varphi(\sigma\tau)\det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}} = \varphi(\tau)\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}$

よって, $\{z,\sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} + \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}\{\tau,z\}_{\varphi(\tau)\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}} = 0$.

再び, Lemma [ ] の (4) を用いれば,

$$\{z,\sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} - \{z,\tau\}_{\varphi(\tau)}\det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}\det\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} = 0$$

従って, $$\{z,\sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} = \{z,\tau\}_{\varphi}\det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}$$

$$\therefore\ [z,\sigma\tau]_{\varphi(\sigma\tau)} = [z,\tau]_{\varphi(\tau)}$$ q.e.d //

次の §では, $PSL(n+1,\mathbb{C})$ の discrete な部分群に関する, 保型形式と, 半標準型との関係を調べる.

§2, 保型形式の微分方程式

この§では、保型形式の満たす微分方程式についての考察を行なう。以下、$\mathcal{D}$を$\mathbb{C}^n$の領域とし、Γを$PSL(n+1,\mathbb{C})$の*discrete*な部分群で、Γに関する、保型函数のなす体の超越次数がnであると仮定する。

<u>Lemma</u> 2.1　$z_1(\tau), \cdots z_n(\tau)$. $(\tau\in\mathcal{D})$. を代数独立な、保型函数であるとする。その時

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix}$$

は weight $n+1$の保型形式である.

<u>Lemma</u> 2.2　$\varphi(\tau)$を weight kの保型形式であるとする。

その時、

$$\Phi(\varphi) = \left|\begin{array}{c|c} k\varphi\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_i\partial\tau_j} & \begin{matrix}(k+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1}\\ \vdots \\ (k+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_n}\end{matrix} \\ \hline \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1}\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_n} & 1 \end{array}\right|$$

は、

weight $2n(k+1)+2$ の保型形式である. (但し$k\neq 0$とする)

<u>proof.</u>　Schwarzian derivative $\{z,\tau\}_\varphi$ の定義から.

$$\mathrm{Hess}_z(\varphi(\tau)\cdot j^{\frac{1}{n+1}}) = j^{-(1+\frac{1}{n+1})}(\mathrm{Hess}_\tau\varphi + \{z,\tau\}_\varphi\varphi)$$

において, $\varphi(\tau)$が weight -1の保型形式ならば, zをτの一次分数変換とすれば、$\mathrm{Hess}_z\varphi$ は weight $n+2$の保型形式である事が、わかる。従って、今の場合、$\mathrm{Hess}_\tau\,\varphi^{-\frac{1}{k}}$ は、weightが

$n+3$ の保型形式である。よって、$\varphi^{n(2+\frac{1}{k})}\mathrm{Hess}_\tau\,\varphi^{-\frac{1}{k}}$ は、weight が、$2n(k+1)+2$ の、保型形式である事に注意する。

$$
\begin{aligned}
&\varphi^{n(2+\frac{1}{k})}\mathrm{Hess}_\tau\,\varphi^{-\frac{1}{k}}\\
&= \det\left(\varphi^{2+\frac{1}{k}}\frac{\partial^2\varphi^{-\frac{1}{k}}}{\partial\tau_i\partial\tau_j}\right)\\
&= \det\left(\varphi^{2+\frac{1}{k}}\frac{\partial}{\partial\tau_j}\left(-\frac{1}{k}\varphi^{-1-\frac{1}{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_i}\right)\right)\\
&= \det\left(\varphi^{2+\frac{1}{k}}\left(\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)\varphi^{-2-\frac{1}{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_j}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_i}-\frac{1}{k}\varphi^{-1-\frac{1}{k}}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_i\partial\tau_j}\right)\right)\\
&= \det\left(\frac{k+1}{k^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_i}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_j}-\frac{1}{k}\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_i\partial\tau_j}\right)\\
&= \left(\frac{-1}{k^2}\right)^n\left|\begin{array}{c|c} k\varphi\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_i\partial\tau_j}-(k+1)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau_i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau_j} & \begin{matrix}(k+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1}\\ \vdots\\ (k+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_n}\end{matrix}\\ \hline 0 & 1\end{array}\right|\\
&= \left(\frac{-1}{k^2}\right)^n\left|\begin{array}{c|c} k\varphi\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_i\partial\tau_j} & \begin{matrix}(k+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1}\\ \vdots\\ (k+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_n}\end{matrix}\\ \hline \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_1},\cdots\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_n} & 1\end{array}\right|\\
&= \left(\frac{-1}{k^2}\right)^n\Phi(\varphi)
\end{aligned}
$$

従って、$\Phi(\varphi)$ は weight が $2n(k+1)+2$ の保型形式である。

q.e.d.

この Lemma を用いて、保型形式が、ある order 以下の、代数的微分方程式を満足しなければならない事を、次に証明しよう。

定理2.1 weight k $(k\neq 0)$ の保型形式は、order が高々、$2n+1$ の代数的微分方程式を満足する。

proof. $f(\tau)$ を weight k $(k\neq 0)$ の保型形式であるとする。Lemma 1 によって $\Phi(f)$ は、weight $k'=2n(k+1)+2$ の保型形式である。以下、$\Phi^{(i)}(f)=\Phi\circ\cdots\circ\Phi(f)$ によって、保型形式を次々に作って行く。$\Phi^{(i)}(f)$ $(i=1,2\cdots n)$ の weight を $k^{(i)}$ とする。$f,\Phi^{(1)}(f),\cdots\Phi^{(n)}(f)$ が、代数独立でなければ、その関係式が、f の満たす代数的微分方程式であるから、$f,\Phi^{(1)}(f)\cdots\Phi^{(n)}(f)$ は、代数独立であるとしてよい。

$$f^{(i)}=\frac{\Phi^{(i)}(f)^{k}}{f^{k^{(i)}}}\quad (i=1,2\cdots n)$$ とおけば、$f^{(1)}\cdots f^{(n)}$ は、代数独立な、保型函数である。一方、Lemma 2 によれば、

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial\tau_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial\tau_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial\tau_1} & \cdots & \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial\tau_n} \end{vmatrix}$$ は weight が $n+1$ の保型形式

である。これを $J(f^{(1)}\cdots f^{(n)})$ で表わすと、$\dfrac{J(f^{(1)}\cdots f^{(n)})^{k}}{f^{n+1}}$ は、保型函数で、保型函数体の超越次数は n と仮定しているから。$f^{(1)},\cdots f^{(n)},\ J(f^{(1)}\cdots f^{(n)})^{k}/f^{n+1}$ は、代数独立では、ありえない。従って、その関係式は、f の代数的微分方程式をあらわし、その order は、作り方から、高々、$2n+1$ である事は、明らかである。

q.e.d.

注　$n=1$のとき、これは、Hurwitzの定理として、よく知られている。H.L. Resnikoff は、Hurwitzの定理を、既約な、tube domain の保型形式の場合に、拡張した。
次に、n個の、代数独立な保型函数と、半標準形との関係について、調べる。

定理 2.2

$\tau_1(z),\cdots,\tau_n(z)$を、$n$個の代数独立な、保型函数とする。
その時、$z=(z_1,\cdots z_n)$ の各成分z_iは、ある、rank $n+1$の完全積分可能な、微分方程式系で、半標準形となっているものの、一組の基本解の組、$y_0(\tau),\cdots,y_n(\tau)$ の商として、
$z_i = y_i(\tau)/y_0(\tau)$ $(1\leq i\leq n)$ と書ける。
しかも、その半標準形を、$L_{ij}(p|\tau,y)=\frac{\partial^2 y}{\partial\tau_i\partial\tau_j}+\sum_{\alpha=1}^{n}P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha}$
$+P_{ij}^{(0)}(\tau)y$ $(1\leq i,j\leq n)$ として、

$$g_{ij}^{(\alpha)}(\tau)=\begin{cases}P_{ij}^{(0)}(\tau) & (\alpha=0)\\ \tau_\alpha P_{ij}^{(0)}(\tau)+P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) & (\alpha\neq 0)\end{cases}$$

によって、$g_{ij}^{(\alpha)}(\tau)$を定めれば、$\det(g_{ij}^{(\alpha)}(\tau))$ $(\alpha=0,1,2\cdots n)$達は、$\tau_1\cdots\tau_n$ の代数函数になる様にできる。

proof.

$y_0(\tau),\cdots y_n(\tau)$ を、$y_0=\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}$, $y_i=z_iy_0$ $(1\leq i\leq n)$
によって定める。この時、明らかに、

$$\frac{\partial^2 y_i\det\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i\partial z_j}=0 \quad (0\leq i\leq n)$$ である。

従って、Lemmaに[?]を用いれば、次の行列の、関係式を得る。

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\tau_\alpha\partial\tau_\beta}\right)\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^t \det\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau_\alpha} + \varphi_i\left(\{z,\tau\}_{ij}^{(0)}\right) = (0)$$

$$(0 \leq i \leq n)$$

よって，$\left(P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\right) = \left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-1}\left(\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)}\right)^t\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-1}\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$(\alpha = 0, 1, \cdots n)$$

と置けば、上式は、

$$\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\tau_\alpha\partial\tau_\beta}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\right)\frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau_\alpha} + \left(P_{ij}^{(0)}\right)\varphi_i = (0)$$

となる。

$\tau_1(z), \cdots, \tau_n(z)$ は、保型函数であるから、Lemma[ ] により、$\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)$ は、weight $n+1$ の保型形式である。Schwarzian derivative $\{z,\tau\}_\varphi$ の定義の式から，$\det\{z,\tau\}_{ij}^{(0)} = \left|\frac{\partial^2 \zeta^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i \partial z_j}\right|$ は、weight $n+2$ の、保型形式である。（但し、ここで $\zeta = \det\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)$）

よって，$\det\left(g_{ij}^{(0)}(\tau)\right) = \det\left(P_{ij}^{(0)}(\tau)\right) = \det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-2}\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{\frac{n}{n+1}}$
$\times \det\left(\{z,\tau\}_{ij}^{(0)}\right)$ は、weight を計算する事によって、τ の保型函数である事がわかる。（見かけ上、ζ の分数巾が、でて来ているが、$\det\left(g_{ij}^{(0)}(\tau)\right)$ は、$\tau_1(z), \cdots \tau_n(z)$ を z_i で、偏微分したものの、多項式となっている事に注意して下さい。）

$\alpha \neq 0$ の時は、$\{z,\tau\}_{ij}^{(\alpha)} + \tau_\alpha\{z,\tau\}_{ij}^{(0)} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}\left(\tau_\alpha \cdot \zeta^{\frac{1}{n+1}}\right)$ である事に注意すれば、$\alpha = 0$ の時と同様にして、$\det\left(g_{ij}^{(\alpha)}\right)$ は、τ の保型函数である事がわかる。保型函数体の超越次数が n であり、$\tau_1(z), \cdots \tau_n(z)$ は、代数独立な、保型函数であったか

ら、$\tau_1(z), \cdots \tau_n(z)$, $\det(g_{ij}^{(\alpha)})$ は、代数独立であり得ない。従って、$\det(g_{ij}^{(\alpha)})$ $(\alpha=0,1,2\cdots n)$ 達は、すべて、$\tau_1,\cdots \tau_n$ の、代数函数である。次に、今、定義した、微分方程式系が、半標準系である事を証明する。

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 \varphi \det\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i\,\partial z_j}\right){}^t\!\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-1}\det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_i\partial\tau_j}\right) + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\right)\frac{\partial\varphi}{\partial\tau_\alpha} + \left(P_{ij}^{(0)}\right)\varphi$$

であるから、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau,y) = \frac{\partial^2 y}{\partial\tau_i\partial\tau_j} + \sum_{\alpha=1}^{n} P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\frac{\partial y}{\partial\tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau)y$ $(1\le i,j\le n)$ の解は、$\varphi\cdot\det\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{n+1}} = z_1,\cdots z_n$ の 1 次以下の多項式全体である。従って、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau,y)$ $(1\le i,j\le n)$ は、rank $n+1$ の、完全積分可能な系である。

$$\begin{vmatrix} \varphi_0, & \cdots, & \varphi_n \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial\tau_n} \end{vmatrix} = \varphi_0 \begin{vmatrix} 1 & z_1, & z_2, \cdots & z_n \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_1}, & \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_1}z_1+\varphi_0\frac{\partial z_1}{\partial\tau_1}, & \cdots & \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_1}z_n+\varphi_0\frac{\partial z_n}{\partial z_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_n}, & \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_n}z_1+\varphi_0\frac{\partial z_1}{\partial\tau_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_n}z_n+\varphi_0\frac{\partial z_n}{\partial z_1} \end{vmatrix} \quad (*)$$

$$\left(\because \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial\tau_j} = z_i\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_j} + \frac{\partial z_i}{\partial\tau_j}\varphi_0\right)$$

(*) の右辺で、行列式の中の、第 j 列 $(j\geq 2)$ の第一行に、$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\tau_i}$ をかけて、第 $i+1$ 行からひくと

$$* = \varphi_0^{n+1}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_2 \cdots & z_n \\ 0 & \frac{\partial z_1}{\partial\tau_1}, & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial\tau_1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & \frac{\partial z_1}{\partial\tau_n} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial\tau_n} \end{vmatrix} = \varphi_0^{n+1}\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial\tau_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial\tau_1} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_1}{\partial\tau_n} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial\tau_n} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_0^{\,n+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$ であるから、

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n$ の τ に関する, Wronskian $W(\varphi_0, \cdots \varphi_n) = 1$,
従って、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau, y) = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^{n} P_{ij}^{(\alpha)}(\tau)\frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau) y$
$(1 \leqq i, j \leqq n)$ は、半標準形で、φ_i $(0 \leqq i \leqq n)$ 達の、とり方から、
$z_i = \varphi_i(\tau)/\varphi_0(\tau)$ である。
よって、定理は、証明された。 q.e.d.//

注. $n=1$ の時は、上の定理は、よく知られている。
(例へば、Ford, Automorphic Functions)

次に、基本解が、代数函数である時、半標準形のモノドロミー群について調べよう。
D を $\mathbb{C}^n$ のある領域として、$\pi_1(D, \tau_0)$ を、基点 τ_0 に関する、基本群であるとする。さらに、ρ を、rank $n+1$ の完全積分可能な、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau, y)$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ の一組の、基本解 $\varphi_0, \cdots \varphi_n$ に関する、モノドロミー表現であるとする。即ち、基点 τ_0 を持つ D 内の loop ℓ に対して、その homotopy class を $[\ell]$ で表わし、$\rho([\ell]) = \sigma \in GL(n+1, \mathbb{C})$ とすれば、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau, y)$ $(1 \leqq i, j \leqq n)$ の基本解 $(\varphi_0, \cdots \varphi_n)$ は、loop ℓ にそっての、解析接続により、

$$\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \vdots \\ \varphi_n\end{pmatrix} \longrightarrow \sigma\begin{pmatrix}\varphi_0\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix} \qquad \sigma\in\rho(\pi_1(D,\tau_0))$$

という変換を受ける.

$z_i = \varphi_i(\tau)/\varphi_0(\tau)$. $(1\le i\le n)$, $\tau_i = f_i(z)$. $z=(z_1,\cdots z_n)$
$(1\le i\le n)$ をその逆変換とする.

<u>定理2.3</u> $L_{ij}(p|\tau,y)$ $(1\le i,j\le n)$ を rank $n+1$ の完全積分可能な微分方程式系で半標準形であるとする。そして、上で定義した、$\tau_i = f_i(z)$ $(1\le i\le n)$ が変換

$\tau=(\tau_1\cdots\tau_n)\longrightarrow z=(z_1,\cdots z_n)$ の D の image 上で single-valued な函数であるとする. もし、微分方程式系 $L_{ij}(p|\tau,y)$ $(1\le i,j\le n)$ の基本解 $\varphi_0,\cdots\varphi_n$ がすべて、τの代数函数であるならば、$\rho(\pi_1(D,\tau_0))$ の任意の元 σ に対して、次の (i) 又は、(ii) が成り立つ.

(i) $\sigma^k = \begin{pmatrix}1&0\cdots0\\ *&*\end{pmatrix}\in\rho(\pi_1(D,\tau_0))$

となる整数 k, $1\le k<\mathrm{ord}\,\sigma$ が存在する.

(ii) $K=\mathbb{C}(\tau_1,\cdots\tau_n)$ とした時.

$\mathrm{ord}\,\sigma \le [K(\varphi_0^{n+1}):K]$.

<u>proof.</u>

任意の $1\le k<\mathrm{ord}\,\sigma$ について. σ^k が $\begin{pmatrix}\xi&0\cdots0\\ *&*\end{pmatrix}$ という

形をしていなくて、 $\operatorname{ord}\sigma > [K(\varphi_0^{n+1}):K]$ であったとしよう。仮定から、 $\varphi_0(\tau), \cdots, \varphi_n(\tau)$ の Wronskian $W(\varphi_0 \cdots \varphi_n)$ は、zero でない、ある定数である。定理[ ]の証明の、最後の所で示したように、

$$W(\varphi_0 \cdots \varphi_n) = \varphi_0^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} = c' \,(\text{constant})$$

である。

よって、
$$\varphi_0^{n+1} = c \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \quad (c : \text{constant})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{00}, & a_{01}, & \cdots & a_{0n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0}, & a_{n1}, & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n+1, \mathbb{C})$$ とすると、loop l

にそって、1回りした時、 $z = (z_1, \cdots z_n)$ は、

$$z = (z_1, \cdots z_n) \longrightarrow [\sigma]\cdot z = \left(\frac{a_{10} + a_{11}z_1 + \cdots + a_{1n}z_n}{a_{00} + a_{01}z_1 + \cdots + a_{0n}z_n}, \cdots \frac{a_{n0} + a_{n1}z_1 \cdots a_{nn}z_n}{a_{00} + a_{01}z_1 + \cdots + a_{0n}z_n} \right)$$

と言う変換を受ける。仮定により、 $\tau_i = f_i(z)$ $(1 \leq i \leq n)$、は、single valued な函数であるから、 $f_i(z) = f_i([\sigma]\cdot z)$ $(1 \leq i \leq n)$

である。 さて、

$$\sigma \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma\varphi)_0 \\ \vdots \\ (\sigma\varphi)_n \end{pmatrix}$$ とすれば、

$$W((\sigma\varphi)_0 \cdots (\sigma\varphi)_n) = \det\sigma \cdot W(\varphi_0, \cdots \varphi_n)$$

で、 $L_{ij}(P|\tau, y)$ が半標準形であるので、 $\det\sigma = 1$. よって、 $\rho(\pi(D, \tau_0)) \subset SL(n+1, \mathbb{C})$ である事に注意する。

Lemma [2.1] から、$\varphi_0^{n+1}(\tau)$ を z の函数と思ったものを、$\Phi(z)$ と書く事にすると $\Phi([\sigma]\cdot z) = (a_{00}+a_{01}z_1+\cdots+a_{0n}z_n)^{n+1}\Phi(z)$ である。φ_0^{n+1} は、$\tau_1,\cdots\tau_n$ の代数函数であるから、$\tau_1,\cdots\tau_n$ の有理函数、$\widetilde{P_0}(\tau),\cdots\widetilde{P_m}(\tau)$ が存在して、(ただし、$m=[K(\varphi_0^{n+1}):K]$)

$$\widetilde{P_0}(\tau)\varphi_0^{m} + \widetilde{P_1}(\tau)\varphi_0^{m-1}+\cdots+\widetilde{P_m}(\tau)=0.$$

$\widetilde{P_0}(\tau),\cdots\widetilde{P_m}(\tau)$ を、z の函数で考えたものを $P_0(z),\cdots P_m(z)$ とすると、$P_i([\sigma]\cdot z) = P_i(z)$ $(0\leq i\leq m)$ である。ここで、$j_\sigma(z)=a_{00}+a_{01}z_1+\cdots+a_{0n}z_n$ と書く事にすれば、次の関係式を得る。

$$\begin{cases} P_0(z)\Phi^{m}(z)+P_1(z)\Phi^{m-1}(z)+\cdots\cdots+P_m(z)=0 \\ a_1^{m}(z)P_0(z)\Phi^{m}(z)+a_1^{m-1}(z)P_1(z)\Phi^{m-1}(z)+\cdots+P_m(z)=0 \\ \vdots \\ a_m^{m}(z)P_0(z)\Phi^{m}(z)+a_m^{m-1}(z)P_1(z)\Phi^{m-1}(z)+\cdots\cdots+P_m(z)=0 \end{cases}$$

(ただし、$\underset{(1\leq i\leq m)}{a_i(z)} = j_{\sigma^i}^{n+1}(z)$)

従って、

$$\begin{vmatrix} 1, & \cdots\cdots, & 1 \\ a_1^{m}(z), & a_1^{m-1}(z),\cdots, & 1 \\ \vdots & & \\ a_m^{m}(z), & a_m^{m-1}(z),\cdots, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

よって、ある整数 $1\leq i\leq m$ が存在して、$a_i(z)=1$ か、又は、i,j $(i\neq j)$ が存在して、$a_i(z)=a_j(z)$、となるかの、どちらかがおこる。いずれにせよ、$a_i(z)=a_{i-j}([\sigma^j]z)a_j(z)$

$\therefore$ $[\sigma^{i}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & * & \end{pmatrix} \in PSL(n+1,\mathbb{C})$ 矛盾 //.

Appendix I

ここでは、ある微分方程式系の半標準形について述べる。

$D \subset \mathbb{C}^n$: 領域

$\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_n) \in D$ とする。

今、次の微分方程式系が、rank $\binom{n+d-1}{d-1}$ の、d 階の、完全積分可能な、微分方程式系であるとする。

$$L_{i_1\cdots i_d}(p|\tau, y) = \frac{\partial^d y}{\partial\tau_{i_1}\cdots\partial\tau_{i_d}} + \sum_{(\alpha_1\cdots\alpha_k)} P^{\alpha_1,\cdots,\alpha_k}_{i_1\cdots i_d}(\tau)\, \frac{\partial^k y}{\partial\tau_{\alpha_1}\cdots\partial\tau_{\alpha_k}}$$

(但し $0 \leq k < d$, $1 \leq i_j \leq n$) とする。

上の微分方程式系の N 個 ($N = \binom{n+d-1}{d-1}$) の基本解を

$\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ とする。$\varphi_1, \cdots \varphi_N$ の Wronskian を

$$W_{\varphi_1\cdots\varphi_N} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_N \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_N}{\partial\tau_1} \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

第k列には、φ_k の $d-1$ 階以下の、全ての偏微分をならべる。

と定義する。§1.と同様に次の定義をする。

Def. $W_{\varphi_1\cdots\varphi_N}$: non-zero constant の時、上の微分方程式系 $L_{i_1\cdots i_d}(p|\tau, y)$ は半標準形であると呼ぶ。

G_1 を、§1.のようにして、定義すると、

Prop. G_1 の作用で、上の微分方程式系は、半標準形に移す事ができる。

注意. 別の type の、標準形について、森川寿氏によって、興味ある例が知られている。

Appendix 2.

以下では，特にことわらなければ，

D: $\mathbb{C}^n$ の homogeneous domain. C: D の特性多様体で，その real 次元 = m.

D は，Cauchy kernel $H(z,\xi)$ を持ち，(i.e. $\forall f(z) \in Hol(D \cup C)$

$f(z) = c' \int_C f(\xi) H(z,\xi)\, d\xi$ （c' はある const）となる $H(z,\xi)$ が存在する.) Cauchy kernel $H(z,\xi)$ が $\mathbb{C}^n$ 上の z についての正則函数 $f(z,\xi)$ のある複素巾として書けている (i.e. $H(z,\xi) = f(z,\xi)^s$) と仮定する.

定理

(i) z の微分作用素 $D_z = P(z,D)$ で

$$D_z^n f(z,\xi)^s = b_n(s,z) f(z,\xi)^{s-n}$$ をみたすものが存在する.

(ii) $\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}} \in Hol(D \cup C)$ （ただし，$\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right) = \det\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)$）

(iii) $\exists\ P(w)^{-\frac{s-n}{2s}} \in Hol(D \cup C)$ s.t. $P(w)|_C = \overline{\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)}\Big|_C$

(iv) $\exists\ Q(w) \in Hol(D)$ s.t. $Q(w)|_C = \frac{b_n(s,w)}{b_n(s,z)}\Big|_C$

（ただし，$w = \sigma(z)$, $\eta = \sigma(\xi)$, $\sigma \in Aut(D)$）

$\Rightarrow$ $\varphi(w) \in Hol(D)$ に対して，

$h(z) = \varphi(w) P(w)^{-\frac{s-n}{2s}} Q(w)$ とおけば

$$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{s-n}{2s}} D_w^n \varphi(w)$$

proof.

$h(z) = c' \int_C H(z,\zeta)\, h(\zeta)\, d\zeta$ に注意すれば、

$$D_z^n h(z) = c' \int_C D_z^n H(z,\zeta)\, h(\zeta)\, d\zeta$$

$$= c' \int_C b_n(s,\zeta)\, H(z,\zeta)^{\frac{s-n}{s}}\, h(\zeta)\, d\zeta \qquad *$$

ここで $\zeta \to \eta$ と変数変換をすれば、

$H(z,\zeta) = H(w,\eta) \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\overline{\frac{\partial \eta}{\partial \zeta}}\right)^{\frac{1}{2}}$ に注意して、

$$* = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{s-n}{2s}} c' \int_C b_n(s,\eta)\, H(w,\eta)^{\frac{s-n}{s}}\, \varphi(\eta)\, d\eta$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{s-n}{2s}} D_w^n \varphi(w)$$

q.e.d. //

Co. 定理の条件(i)をみたす D_z が存在して、

(i) $\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}} \in Hol(\overline{D} \cup C)$

(ii) $b_n(s,\zeta) = b_n(s,\eta)$

(iii) $\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)\Big|_{\substack{z=\zeta \\ w=\eta}}$; real valued

$\Rightarrow$ $\varphi(w) \in Hol(D)$ に対して

$h(z) = \varphi(w) \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}-1}$ とおけば、

$$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{s-n}{2s}} D_w^n \varphi(w)$$

注意： 定理の条件がみたされている時、

$D_z^n h(z) - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{\alpha-n}{2\alpha}} D_w^n \varphi(w) = S^{[n]}(z(w))$ とおけば、$z=\sigma w$ の時（ただし、$\sigma\in \mathrm{Aut}(D)$）、$S^{[n]}(z)=0$，この事に注意して、次の定義をする。

<u>定義</u>（n-th φ-Schwarzian derivative）

領域 D, D' は互いに、双正則とし、

$$\begin{array}{ccc} D & \longleftrightarrow & D' \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \longleftrightarrow & w \end{array}$$

D が定理の (n) の条件を満足するとする，$\alpha+n\neq 0$ のとき、

$h(z) = \varphi(w)\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{\alpha-n}{2\alpha}-1}$ とおくとき、

$$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{\alpha-n}{2\alpha}} D_w^n \varphi(w) + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{\alpha-n}{2\alpha}} \varphi(w)\{z,w\}^{[n]}_{\varphi(w)}$$

によって、$\{z,w\}^{[n]}_{\varphi(w)}$ を定義し、これを n-th φ-Schwarzian derivative と呼ぶ。

<u>prop.</u>

(i) $\{\sigma w, w\}^{[n]}_{\varphi(w)} = 0 \quad (\sigma\in \mathrm{Aut}\, D)$

(ii) $\{\sigma z, w\}^{[n]}_{\varphi(w)} = \{z, w\}^{[n]}_{\varphi(w)}$

(iii) $w = w(v)$ $\quad \mu(w) = \varphi(w)\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^{1-\frac{\alpha-n}{2\alpha}}$ のとき、

$$\{z,v\}^{[n]}_{\mu} = \{w,v\}^{[n]}_{\mu} + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^{-\frac{n}{\alpha}} \{z,w\}^{[n]}_{\varphi}$$

(iv) $\{z,w\}^{[n]}_{\varphi} + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{n}{\alpha}} \{w,z\}_{h} = 0$

証明は、§1、Lemma [ ] と同様にすれば、できる。

<u>prop.</u> $f: \underset{w \longmapsto z(w)}{D \longrightarrow D}$: holomorphic map.

& $f(C)=C$ で $\exists n \in \mathbb{Z}^{+}$ (s.t. $s+n \neq 0$, $\{z, w\}^{[n]}_{\varphi(w)}=0$,

for $\forall \varphi \in Hol(D\ \ )$

$\Rightarrow$ $f \in Aut(D)$

<u>proof.</u> $z=f(w)$, $\xi=f(\eta)$ とする。仮定より、

$h(z)=\varphi(w)\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}-1}$ とおけば $D_z^n h(z)=\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}} D_w^n \varphi(w)$

従って、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}} D_z^n h(z)=c'\int_C H(z,\xi)^{\frac{s-n}{s}}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}\varphi(\eta)\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\,\dot{\eta}$$

(但し c' は ある constant).

一方、 $D_w^n \varphi(w)=\int_C H(w,\eta)^{\frac{s-n}{s}}\varphi(\eta)\,\dot{\eta}$

よって、 $H(z,\xi)^{\frac{s-n}{s}}\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{s-n}{2s}}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta}\right)^{\frac{s-n}{2s}}=\alpha(z,\xi)^{\frac{s-n}{s}}$ とおけば

$$\int_C \alpha(z,\xi)^{\frac{s-n}{s}}\varphi(\eta)\,\dot{\eta}=\int_C H(w,\eta)^{\frac{s-n}{s}}\varphi(\eta)\,\dot{\eta}$$

ここで、 $\varphi(\eta)=H(w,\eta)^{\frac{n}{s}}P(\eta)$ $P(\eta)\in Hol(D\cup\bar{C})$ とおけば、

$$\int_C \alpha(z,\xi)^{\frac{s-n}{s}}H(w,\eta)^{\frac{n}{s}}P(\eta)\,\dot{\eta}=\int_C H(w,\eta)P(\eta)\,\dot{\eta}=P(w)$$

よって、 $\alpha(z,\xi)^{\frac{s-n}{s}}H(w,\eta)^{\frac{n}{s}}$ も $H(w,\eta)$ と同じ働きを持つ事がわかったから、 $\alpha(z,\xi)^{\frac{s-n}{s}}H(w,\eta)^{\frac{n}{s}}=H_1(w,\eta)$

とおくと、 $H_1(w,\eta)=\int_C H_1(\xi,\eta)H(w,\xi)\,\dot{\xi}=H(w,\eta)$

この事から、f が $Aut(D)$ に属する事がわかる。

Aut(D)のdiscreteな部分群Γに対して、D上の正則函数φ(w)が、 $\varphi(z)=\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{k}{2}}\varphi(w)\quad (z=\sigma(w)\ \text{for}\ \forall\sigma\in\Gamma)$

をみたす時、φ(w)を、weight kのΓに関する、保型形式であると、ここでは、言う事にする。

$$A(\Gamma,k)\ \underset{\mathrm{def}}{=}\ \{\text{weight } k \text{ の} \Gamma \text{に関する保型形式、全体のなす vector space}\}$$

以下、領域Dは、定理[1]のCorの仮定をみたす、領域であるとする。以下では、Schwarzian derivativeと保型形式との関係について、述べる。

Lemma

D′は、Dに双正則な領域とし、Γ′⊂Aut(D′)をdiscrete groupとし、$\varphi(\tau)\in A(\Gamma',-s-n)$と仮定する。この時、$\forall\sigma\in\Gamma'$に対して

$$\{z,\sigma\tau\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)}=\{z,\tau\}^{[n]}_{\varphi(\tau)}\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{n}{s}}$$

証明は、§1、Lemma[ ]と同様であるので省略する。

Lemma

$\varphi(\tau)\in A(\Gamma',-s-n)$、$\{z(\tau),\tau\}^{[n]}_{\varphi(\tau)}\in A(\Gamma',2n)$

$$\Rightarrow\ \{z(\sigma\tau),z(\tau)\}^{[n]}_{h(\tau)}=0\quad \left(\text{ただし、} h(\tau)=\varphi(\tau)\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}\right)$$

proof. 仮定から、$\{z(\sigma\tau),\sigma\tau\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)}=\{z,\tau\}^{[n]}_{\varphi}\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{n}{s}}$

従って、前のLemmaより、$\{z(\tau),\sigma\tau\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)}=\{z(\sigma\tau),\sigma\tau\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)}$

prop[ ]の(iii)によれば、

$$\{z(\sigma\tau),\sigma\tau\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)}=\{z(\tau),\sigma\tau\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)}+\left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial(\sigma\tau)}\right)^{-\frac{n}{s}}\{z(\sigma\tau),z(\tau)\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)\left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial(\sigma\tau)}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}}$$

よって、$\{z(\sigma\tau), z(\tau)\}^{[n]}_{\varphi(\sigma\tau)\left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial(\sigma\tau)}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}} = 0$. 仮定から、

$\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\tau)\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}$ だから、$\varphi(\sigma\tau)\left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial(\sigma\tau)}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} = \varphi(\tau)\left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}$

だから、$\varphi(\sigma\tau)\left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial\sigma\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} = \varphi(\tau)\left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}$ よって $\{z(\sigma\tau), z(\tau)\}^{[n]}_{\varphi(\tau)} = 0$ //

この Lemma の証明の方法から、容易に次の Lemma を得る。

<u>Lemma</u> D と D' は双正則とし、$\sigma \in \Gamma' \subset \mathrm{Aut}(D')$ の時、次の

写像 σ、
$$\sigma : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D \\ \Psi & & \Psi \\ z(\tau) & \longmapsto & z(\sigma\tau) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc} D & \longleftrightarrow & D' \\ \Psi & & \Psi \\ z & \longleftarrow & \tau \end{array}\right)$$
が

$\sigma \in \mathrm{Aut}(D)$ の時、$\varphi(\tau) \in A(\Gamma, -s-n)$

$\Rightarrow$ $\{z(\tau), \tau\}^{[n]}_{\varphi(\tau)}$ は D' 上の関数とみた時、weight $2n$ の Γ' に関する、保型形式である。

次に、この Lemma の条件が、満足される場合について、考える。

<u>Lemma</u>

$$\begin{tikzcd} z \in D \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, leftrightarrow, "双正則"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & D \arrow[d, "正則"] \\ \tau \in D' \arrow[r, "\sigma"'] & D' \end{tikzcd}$$

D と D' が双正則で左の図が可換の時、

$\sigma \in \Gamma'$ に対して、$\mathrm{Aut}(D)$ の元 $\tilde{\sigma}$

を対応させる写像

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(D) \\ \Psi & & \Psi \\ \sigma & \longrightarrow & \tilde{\sigma} \end{array}$$

による Γ' の image を Γ とする.

$\varphi(\tau) \in A(\Gamma', -s-n)$、で $h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}}\varphi(\tau)$ とおけば、

$D_z^n h(z)$ は、D 上の函数と見た時、Γ に関する、weight $n-s$ の保型形式である。(但し、ここで、$n = 0, 1, 2\cdots$, $n+s \neq 0$ とする)

<u>proof.</u> $n=0$ の時。

$$h(\tilde{\sigma}\cdot z) = \left(\frac{\partial z(\sigma\cdot\tau)}{\partial(\sigma\cdot\tau)}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} \varphi(\sigma\cdot\tau) = \left(\frac{\partial z(\sigma\cdot\tau)}{\partial(\sigma\cdot\tau)}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} \left(\frac{\partial(\sigma\cdot\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} \varphi(\tau)$$

$$= \left(\frac{\partial z(\sigma\cdot\tau)}{\partial(\tau)}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} \varphi(\tau) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}\cdot z)}{\partial z}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} h(z)$$

よって、 $h(\tilde{\sigma}\cdot z) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}\cdot z)}{\partial z}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} h(z)$.

$\varphi(\sigma\cdot\tau) = \left(\frac{\partial(\sigma\cdot\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} \varphi(\tau)$ だから、定理[1]の、Cor. により、

$D_\tau^n \varphi(\tau)$ は、weight $n-s$ の、保型形式である事に注意すれば、

$$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{-s-n}{2s}} D_\tau^n \varphi(\tau) + \left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{n-s}{2s}} \varphi(\tau) \{z,\tau\}_{\varphi(\tau)}^{[n]}$$

である。従って、

$P(\tau) = \left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right)^{\frac{s-n}{2s}} D_z^n h(z)$ は、τ の函数と見た場合、weight、

が $n-s$ の、保型形式である。

$$P(\sigma\cdot\tau) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}\cdot z)}{\partial(\sigma\cdot\tau)}\right)^{\frac{s-n}{2s}} D_{\tilde{\sigma}\cdot z}^n h(\tilde{\sigma}\cdot z) = \left(\frac{\partial(\sigma\cdot\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{n-s}{2s}} P(\tau)$$

に注意すれば、

$$D_{\tilde{\sigma}\cdot z}^n h(\tilde{\sigma}\cdot z) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}\cdot z)}{\partial z}\right)^{\frac{n-s}{2s}} D_z^n h(z).$$ q.e.d.//