

ベル数 $B(N)$ の 1 つの算式

名工大 大芝 猛

N 個の要素からなる集合 $\Gamma = \{0, 1, \dots, N-1\}$ の分割全体をある条件をみたす N 集数の集まりであらわす。このような N 進数全体の個数として Γ の分割全体の個数 (Bell 数) を表わす次の式をうる。

$$B(N) = \sum_{1 \leq r \leq N} \sum_{d_1 + \dots + d_r = N-r} 1^{d_1} \cdot 2^{d_2} \cdot \dots \cdot r^{d_r}$$

またこのような N 進数全体に自然な順序を与えることにより、分割全体をとりのこしなくカウントする 1 つの方法を示す。

(定義) N 進数 $\nu = (n_0, n_1, \dots, n_{N-1})$ ($n_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$)

に対し

$$F^N(\nu) \stackrel{\text{def.}}{\iff} n_0 = 0 \wedge \forall_i \ 0 < i \leq N-1 \ (\max_{j < i} n_j + 1 \geq n_i)$$

とし $F^N \stackrel{\text{def.}}{=} \{\nu \mid F^N(\nu), \nu \text{ は } N \text{ 進数}\}$ とする。

(Proposition 1) $\Gamma = \{0, 1, \dots, N-1\}$ の分割全体を \mathbb{C}^N

とある。1:1 onto 写像 $g: \mathbb{F}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ は次のように与えられる:

$$\nu = (n_0, n_1, \dots, n_{N-1}) \in \mathbb{F}^N \text{ に対し}$$

$$g(\nu) \stackrel{\text{def.}}{=} \{ \{i \mid n_i = 0\}, \{i \mid n_i = 1\}, \dots, \{i \mid n_i = M(\nu)\} \}$$

$$\text{但し } M(\nu) = \max_{0 \leq i \leq N-1} n_i$$

従って $B(N) = \#(\mathbb{F}^N) \dots \mathbb{F}^N$ の個数。

(証明) (1) $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{F}^N$, $\nu_1 \neq \nu_2 \rightarrow g(\nu_1) \neq g(\nu_2)$

(2) $C \in \mathbb{C}^N \rightarrow \exists \nu_0 \in \mathbb{F}^N$, $g(\nu_0) = C$ を示す。

• $N = 1$ のときは明らか。

(1) $\nu, \mu \in \mathbb{F}^N$, $\nu = (n_0, \dots, n_{N-1}) \neq \mu = (m_0, \dots, m_{N-1})$, $N > 1$

に対し $I_0 = \min \{i \mid n_i \neq m_i, 0 < i \leq N-1\}$ とおく。

$g(\nu)$ のブロッック $\{i \mid n_i = n_{I_0}\}$ は I_0 を含む。

$g(\mu)$ のブロッック $\{i \mid m_i = n_{I_0}\}$ は I_0 を含まない。

よって、 $n_{J_0} = m_{J_0} = n_{J_0}$ ($J_0 < I_0$) なる J_0 と共通にもつ故

$g(\nu) \neq g(\mu)$ 。

(\because) $I_0 > 0$ 故 $\max_{j < I_0} n_j + 1 = \max_{j < I_0} m_j + 1 \geq m_{I_0} > n_{I_0}$
 従って $\max_{j < I_0} n_j \geq n_{I_0}$, 故に $\exists j$, $j < I_0$ & $n_j \geq n_{I_0}$
 $J_0 = \min_j \{j \mid j < I_0 \text{ \& } n_j \geq n_{I_0}\}$ とおく。
 従って $J_0 < I_0$, $n_{J_0} \geq n_{I_0}$, $j < J_0 \rightarrow n_j < n_{I_0}$
 $n_{J_0} \leq \max_{j < J_0} n_j + 1 \leq n_{I_0}$
 故に $n_{I_0} = n_{J_0} = m_{J_0}$

(2) g が onto である = τ .

$\Gamma = \{0, \dots, N-1\}$ の任意の分割 $C = \{A_1, \dots, A_p\} \in \mathcal{C}^N$ につき

$d(k) = \min A_k$ ($1 \leq k \leq p$), (特に $d(p+1) = N$) とおく.

一般性を失うことなく $d(1) = 0 < d(2) < \dots < d(p) \leq N-1 < N = d(p+1)$

$\nu_0 = (n_0, n_1, \dots, n_{N-1})$ を次のように定める:

「 $\forall i \in \Gamma$ の $i \in A_j$ に対し, $n_i \stackrel{\text{def}}{=} j-1$ 」 ($j=1, \dots, p$).

特に $d(j) \in A_j$ 故 $n_{d(j)} = j-1$.

\therefore $g(\nu_0) = \{ \{i \mid n_i = 0\}, \dots, \{i \mid n_i = p-1\} \}$

$$= \{A_1, \dots, A_p\} = C.$$

また $\nu_0 \in \mathbb{F}^N$ である.

- (\because) $0 = d_1 \in A_1$ より $n_0 = 0$
- \circ 任意の $i > 0$ に対して, $i \in A_k$ なる k ($1 \leq k \leq p$) あり.
- $d(k) \leq i$ かつ $n_{d(k)} = n_i = k-1$.
- ① $d(k) < i$ のとき: $n_i = n_{d(k)} \leq \max_{j < i} n_j < \max_{j < i} n_j + 1$
- ② $d(k) = i$ のとき: $n_i = n_{d(k)} = k-1 = (k-2)+1 = n_{d(k-1)} + 1 \leq \max_{j < i} n_j + 1$

(Proposition 2)

$$B(N) = \sum_{1 \leq r \leq N} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = N \\ k_1 \geq 1, \dots, k_r \geq 1}} 1^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdot \dots \cdot r^{k_r-1}$$

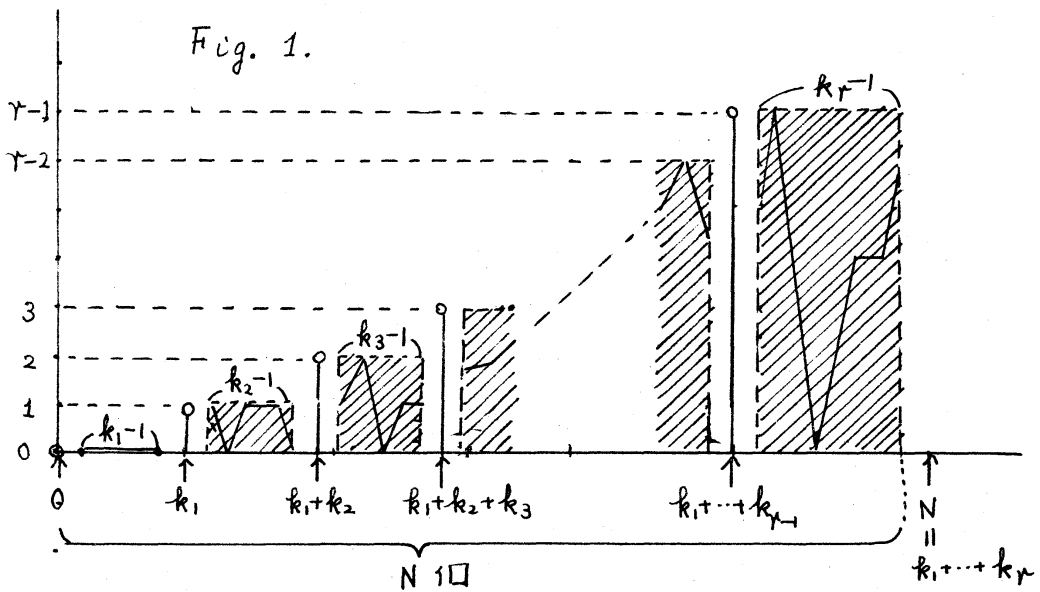
(証明) $1 \leq r \leq N$, $k_1 + \dots + k_r = N$, $k_1 \geq 1, \dots, k_r \geq 1$ のとき

$Q(k_1, \dots, k_r)$ と

$$\stackrel{\text{def}}{=} \{ (n_0, \dots, n_{N-1}) \in \mathbb{F}^N \mid \forall_j (1 \leq j \leq r) (n_{k_1+\dots+k_{j-1}} = j-1) \wedge \forall_i (k_1+\dots+k_{j-1} < i < k_1+\dots+k_j \rightarrow 0 \leq n_i \leq j-1) \}$$

と定義する。(但し $j=1$ のとき, $k_1+\dots+k_{j-1} = 0$ とする。)

$\mathcal{Q}(k_1, \dots, k_r)$ は「Fig. 1. の \circ 印の点を通り, 斜線の内部を任意の折線グラフで結んでうる N 進数全体」と一致する。



グラフのオオブロック 即ち $k_1+\dots+k_{j-1} < i < k_1+\dots+k_j$ 内の折線グラフの全体は j^{k_j-1} 個である。従って

$$\#(\mathcal{Q}(k_1, \dots, k_r)) = 1^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdot \dots \cdot r^{k_r-1}$$

$$\text{一方 } \mathbb{F}^N = \bigcup_{1 \leq r \leq N} \bigcup_{\substack{k_1+\dots+k_r=N \\ k_1 \geq 1, \dots, k_r \geq 1}} \mathcal{Q}(k_1, \dots, k_r)$$

また $(k_1, \dots, k_r) \neq (k'_1, \dots, k'_r)$ ならば

$$\mathcal{Q}(k_1, \dots, k_r) \cap \mathcal{Q}(k'_1, \dots, k'_r) = \emptyset$$

$$\text{従って } B(N) = \#(\mathbb{F}^N) = \sum_{1 \leq r \leq N} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_r = N \\ k_1 \geq 1, \dots, k_r \geq 1}} 1^{k_1-1} \cdot 2^{k_2-1} \cdot \dots \cdot r^{k_r-1}$$

また $k_j - 1 = d_j$ とおけば ($d_j \geq 0$) 直ちに

$$B(N) = \sum_{1 \leq r \leq N} \sum_{d_1 + \dots + d_r = N - r} 1^{d_1} \cdot 2^{d_2} \cdot \dots \cdot r^{d_r} \quad \text{と する。}$$

(註) r を fix したとき、外側の \sum を除いた式は

N 個の集合の r 分割全体の個数 (オズワルドのスターリング数)

を与える。

$$S(N, r) = \sum_{d_1 + \dots + d_r = N - r} 1^{d_1} \cdot 2^{d_2} \cdot \dots \cdot r^{d_r}$$

[\mathbb{F}^N の要素間の順序とカウント法]

$$\nu = (n_0, \dots, n_{N-1}), \mu = (m_0, \dots, m_{N-1}) \in \Gamma^\Gamma \quad (\Gamma = \{0, 1, \dots, N-1\})$$

に対し

$$\nu < \mu \stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists k \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (n_0 = m_0 \wedge \dots \wedge n_{k-1} = m_{k-1} \wedge n_k < m_k)$$

と定義されるが、

\mathbb{F}^N の要素にもこの順序をそのまま用いる。

1° $(0, \dots, 0), (0, 1, \dots, N-1)$ は \mathbb{F}^N の最小, 最大の要素である

ことは容易に確かめうる

2° $B(N)$ 個の \mathbb{F}^N の要素を上記の順序で番号をつけ

$1 \leq d \leq B(N)$ なる d 番目の要素を $p(d)$ であらわす。

(定義) (1) $p(1) = (\underbrace{0, \dots, 0}_{N \text{ 個}})$

(2) $1 \leq d < B(N)$ に対し $p(d+1) = \min\{\nu \in \mathbb{F}^N \mid p(d) < \nu\}$

(Proposition 3) $1 \leq d < B(N)$ に対し

$P(d+1) = (n'_0, \dots, n'_{N-1})$ は $p(d) = (n_0, \dots, n_{N-1})$ を用いて、

次のように計算される:

先ず、 $\max \{i \mid N-1 \geq i > 0 \wedge \max_{j < i} n_j + 1 > n_i\} = k$ とし、

$$(*) \begin{cases} n'_0 = n_0, \dots, n'_{k-1} = n_{k-1} \\ n'_k = n_k + 1 \\ n'_{k+1} = \dots = n'_{N-1} = 0 \end{cases} \quad \text{と可る.}$$

(従って Fig. 2. のフローチャートを用いる.)

(証明) $p(d) = (n_0, \dots, n_{N-1}) \in \mathbb{F}^N$, $1 \leq d < B(N)$ に対し、

(0) $\exists i: (N-1 \geq i > 0 \wedge \max_{j < i} n_j + 1 > n_i)$ で上記 k が定義される

こと、(*) のように定めれば $\rho = (n'_0, \dots, n'_{N-1})$ につき、

(1) 「 $p(d) < \rho$, $\rho \in \mathbb{F}^N$ 」

(2) 「 $p(d) < \mu < \rho$ なる μ は存在せず $\mu \notin \mathbb{F}^N$ 」を示す。

まず (0) につき: μ からさるとせば、 $(n_0, \dots, n_{N-1}) \in \mathbb{F}^N$

に注意すれば、 $\forall i: (N-1 \geq i > 0 \rightarrow \max_{j < i} n_j + 1 = n_i)$, $n_0 = 0$.

このとき、「 $n_j = j$ ($j=0, \dots, i$)」と i に関する帰納法で容易に示しうる。

従って $p(d) = (n_0, \dots, n_{N-1}) = (0, 1, \dots, N-1)$ 矛盾。

(1) につき: $p(d) < \rho$ は (*) の定義から明らか。

また $\rho = (n'_0, \dots, n'_{N-1})$ につき $n'_0 = n_0 = 0$ であるが

$\max_{j < i} n'_j + 1 \geq n'_i$ $\neq (i=1, \dots, k, \dots, N-1)$ につき、確かめよう。

$$| \circ n'_k = n_k + 1 < (\max_{j < k} n_j + 1) + 1 = \max_{j < k} n'_j + 2, \quad \text{故に } n'_k \leq \max_{j < k} n'_j + 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < i < k \text{ に対し, } n'_i = n_i \leq \max_{j < i} n_{j+1} = \max_{j < i} n'_j + 1 \\ 0 < k < i \text{ に対し, } n'_i = 0 \leq \max_{j < i} n'_j + 1 \end{array} \right.$$

$$(2) \text{ により } \nu = p(d) = (n_0, \dots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{N-1}) \\ < \mu = (m_0, \dots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \dots, m_{N-1}) \\ < \rho = (n_0, \dots, n_{k-1}, n_{k+1}, 0, \dots, 0) \text{ のとき,}$$

$$(m_0, \dots, m_{k-1}) = (n_0, \dots, n_{k-1}) \text{ 故 } (m_k, m_{k+1}, \dots, m_{N-1}) < (n_{k+1}, 0, \dots, 0)$$

$$\text{従って, } m_k < n_{k+1}, \text{ 一方 } n_k \leq m_k \text{ 故に } n_k = m_k.$$

$$\text{従ってまた, } (n_{k+1}, \dots, n_{N-1}) < (m_{k+1}, \dots, m_{N-1}) \text{ 即ち}$$

$$\exists i_0 > k : (n_0, \dots, n_{i_0-1}) = (m_0, \dots, m_{i_0-1}), m_{i_0} > n_{i_0}.$$

$$\text{一方 } n_{i_0} = \max_{j < i_0} n_{j+1} = \max_{j < i_0} m_{j+1}, \text{ 故に } m_{i_0} > \max_{j < i_0} m_{j+1}, \text{ 即ち } \mu \notin \mathbb{F}^N.$$

謝辞 本稿に関連して、山梨大学の野崎昭弘教授、東海大学の成島弘助教授に種々御注意、資料を頂いたことと感謝いたします。

Fig. 2.

