数理解析研究所講究録
323巻 1978年 39-64

核函数をもつHilbert空間の直積における極値問題

群馬大学工学部　　斎藤三郎

0、序論、

$H_\alpha(G)$ $(\alpha=1,2)$ を内積 $(\ ,\ )_\alpha$ と再生核 $K_\alpha(z,u)$ をもつ集合 G 上の函数族によって構成されるHilbert空間とする。したがって、$G\times G$ 上の函数 $K_\alpha(z,u)$ は次の性質をもつ；

(a) すべての $u\in G$ に対して、$K_\alpha(z,u)$ はその函数として $H_\alpha(G)$ に属する；

(b) すべての $u\in G$ とすべての $f\in H_\alpha(G)$ に対して、

$$f(u)=\left(f(z),\ K_\alpha(z,u)\right)_\alpha$$

(cf.［1］, pp. 342－346)。ここでは次の自明な不等式を考え、等号がいかなる $\varphi^{(\alpha)}\in H_\alpha(G)$ に対して起きるかを問題にする：

(0.1) $$(\varphi^{(1)},\varphi^{(1)})_1\,(\varphi^{(2)},\varphi^{(2)})_2$$
$$\geqq \min\sum_j\sum_k(\varphi_j^{(1)},\varphi_k^{(1)})_1\,(\varphi_j^{(2)},\varphi_k^{(2)})_2$$

$$\text{for } \varphi^{(\alpha)},\ \varphi_j^{(\alpha)} \in H_\alpha(G).$$

ここで, min は

$$(0.2)\qquad \varphi^{(1)}(z)\varphi^{(2)}(z) = \sum_j \varphi_j^{(1)}(z)\varphi_j^{(2)}(z) \quad \text{on } G$$

なる条件を満たすすべての函数族 $\varphi_j^{(\alpha)} \in H_\alpha(G)\ (\alpha=1,2)$ に対して考える. この等号問題は2つのSzegö空間の場合に初めて [12] で考えられた. この問題は2つのHilbert空間 $H_1(G)$ と $H_2(G)$ の直積 H におけるある極値問題として考えられる.

本稿は2つの部分に分かれ, 第1部では一般論の立場から問題を論じる. つまり, 第1節で, 等号問題をいくつかの観点からながめ, 第2節ではその応用としてある有限次元の場合における一般的な定理を確立し, 第3節においていくつかの反例によって問題の複雑さを示す. 第2部では典型的なHilbert空間であるcompact bordered Riemann面上のSzegö型空間とBergman空間の場合について考える. つまり, 第4節で, 任意の2つのSzegö型空間の場合, 第5節で, 普通のBergman空間とF−族のBergman空間の場合, 第6節ではSzegö型空間とF−族のBergman空間の場合を考える. 第7節において, 特別な場合として整函数の族のなすFischer空間どうしの場合が論じられる. 第8節で, 関連している問題について言及する.

尚、本稿においては大部分の証明は省略し，結果のみを述べることにする。

1．一般的考察。

$H = H_1(G) \otimes H_2(G)$ を２つのHilbert空間$H_\alpha(G)$の直積として，$(\, , \,)$ および $\| \ \|$ をHの内積とnormを表わすものとする．$H_{D(0)}$ を $G \times G$ の対角線集合Dに沿って零となるHの部分空間とする．Hの構成に関しては［6］と［1］が，また当面している問題については［12］が参照できる．

(0.2)について，$\left\{ \sum_j^n \varphi_j^{(1)}(z_1) \varphi_j^{(2)}(z_2) \right\}$ が $\varphi^{(1)}(z_1) \varphi^{(2)}(z_2)$ にHで収束するとき，(0.2)が成立することに注意しておく（cf. ［1］，PP. 344，357－362 および 351－352）．

まず，(0.1)における等号問題は次のように言い換えることができる：

命題 1.1.（Cf. ［1］，PP. 357－362；392－393 および［12］）．$\varphi^{(\alpha)} \in H_\alpha(G)$（$\alpha = 1, 2$）に対して，(0.1)で等号が起きる完全な条件は，$\varphi^{(1)}(z_1) \varphi^{(2)}(z_2)$ がDに沿って $h(z, z) = \varphi^{(1)}(z) \varphi^{(2)}(z)$ を満足するすべての$h(z_1, z_2) \in H$ のうちで $\|h\|$ を最小にする極値函数であることである．

ゆえに，$\varphi^{(1)}(z_1)\varphi^{(2)}(z_2)$ は次の直交条件によって完全に特徴付けられる：

$$(1.1)\qquad \left(\varphi^{(1)}(z_1)\varphi^{(2)}(z_2),\ h(z_1, z_2)\right) = 0 \quad \text{for all } h \in H_{D(0)}.$$

ここで，任意の点 $u \in G$ に対して，$K_1(z, u)K_2(z, u)$ は (0.1) において等号を満足していることに注意する．

実際，$K_1(z_1, u)K_2(z_2, v)$ $(u, v \in G)$ は H の再生核であるから（[1], pp. 357−362），

$$\begin{aligned}&(h(z_1, z_2),\ K_1(z_1, u)K_2(z_2, u))\\ &= h(u, u) = 0 \quad \text{for all } h \in H_{D(0)}.\end{aligned}$$

定義．不等式 (0.1) で等号を満足する任意の函数 $\varphi^{(\alpha)}$ の積 $\varphi^{(1)}(z)\varphi^{(2)}(z)$ が適当な定数 C と適当な $u \in G$ によって $C K_1(z, u)K_2(z, u)$ と表わされるとき，2つの Hilbert 空間 $H_1(G)$ と $H_2(G)$ とは正則な関係にある，あるいは単に正則であると呼ぶ．

したがって，われわれの基本的な問題は2つの Hilbert 空間が正則な関係にあるための条件を見出すこと，および正則な関係にあるものとないものを類別することである．

$E = \{u_j\}_j$ $(u_j \neq u_k \text{ for } j \neq k)$ を G の部分集合と

して次の仮定を置く：

A1. $\{K_\alpha(z, u_j)\}_j$ $(\alpha = 1, 2)$ は $H_\alpha(G)$ で完全である。

A2. $\{K_\alpha(z, u_j)\}_j$ $(\alpha = 1, 2)$ は $H_\alpha(G)$ で一次独立である。

A3. $\{K_1(z_1, u_j)K_2(z_2, u_j)\}_j$ は $H_{D(0)}$ の H における直交補空間 $(H_{D(0)})^{\perp}$ で完全である。

仮定A1 とA3 は強いものではないといえる。というのは多くの場合 G あるいは $G \times G$ 上の連続函数の族によって構成される Hilbert 空間を考えるから，E として G の稠密な集合をとればこれらの仮定は満足される（cf. [5], P. 49）。従属なものは除いて考えればよいから，仮定 A2 は便宜的なものといえる。仮定A3 について，2つの $H_\alpha(G)$ の次元が一致しないときには大きい方の次元によって函数族 $\{K_1(z_1, u_j) \times K_2(z_2, u_j)\}_j$ を考えなければならないことに注意しておく。なお，A1 と A2 から一般には A3 が出るとは限らないことを第3節で示そう。

これらの仮定の下に $H_\alpha(G)$ と $(H_{D(0)})^{\perp}$ の完全正規直交基底 $\{\sigma_j^{(\alpha)}\}_j$ と $\{\sigma_j(z_1, z_2)\}_j$ を $\{K_\alpha(z, u_j)\}_j$ と $\{K_1(z_1, u_j)K_2(z_2, u_j)\}_j$ から Gram-Schmidt の方法によって構成できる。したがって，次のように置くことができ

る：

$$(1.2)\qquad \sigma_j^{(\alpha)}(z) = \sum_{\nu=1}^{j} A_{j,\nu}^{(\alpha)} K_\alpha(z, u_\nu), \quad A_{j,j}^{(\alpha)} \neq 0,$$

$$(1.3)\qquad \sigma_j(z_1, z_2) = \sum_{\nu=1}^{j} A_{j,\nu} K_1(z_1, u_\nu) K_2(z_2, u_\nu),$$

$$A_{j,j} \neq 0.$$

ここで，定数 $\{A_{j,\nu}^{(\alpha)}\}$，$\{A_{j,\nu}\}$ は次の方程式によって決定される：

$$(1.4)\qquad \sum_{\nu=1}^{j} \sum_{\mu=1}^{k} A_{j,\nu}^{(\alpha)} \overline{A_{k,\mu}^{(\alpha)}} K_\alpha(u_\mu, u_\nu) = \delta_{j,k},$$

$$(1.5)\qquad \sum_{\nu=1}^{j} \sum_{\mu=1}^{k} A_{j,\nu} \overline{A_{k,\mu}} K_1(u_\mu, u_\nu) K_2(u_\mu, u_\nu) = \delta_{j,k}.$$

特に次のことが成立する：

$$(1.6)\qquad \sigma_j^{(\alpha)}(u_k) = \sigma_j(u_k, u_k) = 0$$

$$\text{for all pairs } (j, k)\ ;\quad j > k,$$

(cf. [5], pp. 56 — 62)．次に $\varphi^{(\alpha)}(z)$ を $\{\sigma_j^{(\alpha)}(z)\}$ で展開する：

$$(1.7)\qquad \varphi^{(\alpha)}(z) = \sum_j C_j^{(\alpha)} \sigma_j^{(\alpha)}(z), \quad \sum_j |C_j^{(\alpha)}|^2 < \infty.$$

一方 (1.1) と A3 から，ある定数 $\{C_j\}$ によって次のように置ける：

$$(1.8)\quad \varphi^{(1)}(z_1)\,\varphi^{(2)}(z_2) = \sum_j c_j\,\sigma_j(z_1, z_2)$$

$$= \sum_j \sum_k C_j^{(1)} C_k^{(2)}\,\sigma_j^{(1)}(z_1)\,\sigma_k^{(2)}(z_2),$$

$$\sum_j |c_j|^2 < \infty.$$

ところで，$\sigma_j(z_1, z_2) \in H$ であるから，ある定数$\{S_{\nu,\mu}^{(j)}\}$によって次のように置ける：

$$(1.9)\quad \sigma_j(z_1, z_2) = \sum_\nu \sum_\mu S_{\nu,\mu}^{(j)}\,\sigma_\nu^{(1)}(z_1)\,\sigma_\mu^{(2)}(z_2),$$

$$\sum_\nu \sum_\mu |S_{\nu,\mu}^{(j)}|^2 < \infty.$$

ここで，(1.3), (1.6) および

$$S_{\nu,\mu}^{(j)} = \Big(\big(\sigma_j(z_1, z_2),\ \sigma_\nu^{(1)}(z_1)\big)_1,\ \sigma_\mu^{(2)}(z_2)\Big)_2$$

$$= \Big(\big(\sigma_j(z_1, z_2),\ \sigma_\mu^{(2)}(z_2)\big)_2,\ \sigma_\nu^{(1)}(z_1)\Big)_1$$

から，次のことに気付く：

$$(1.10)\quad S_{\nu,\mu}^{(j)} = 0 \quad \text{for all } j :\ j < \max(\nu, \mu)$$

$$(1.11)\quad S_{1,1}^{(j)} = 0 \quad \text{for all } j :\ j > 1$$

$$(1.12)\quad S_{1,1}^{(1)} = 1.$$

さらに，(1.2), (1.3), (1.9) とから次を得る：

$$(1.13)\quad \sum_{\nu=\alpha}^{j} \sum_{\mu=\beta}^{j} S_{\nu,\mu}^{(j)}\,A_{\nu,\alpha}^{(1)}\,A_{\mu,\beta}^{(2)} = A_{j,\alpha}\,\delta_{\alpha,\beta},$$

$$(1.14)\quad \sum_\nu \sum_\mu S_{\nu,\mu}^{(j)}\,\overline{S_{\nu,\mu}^{(k)}} = \delta_{j,k}.$$

以上の考察の下で，われわれの問題は展開係数 $\{C_j^{(\alpha)}\}$ と $\{c_j\}$ で次のように言い換えることができる：

命題 1.2. $\varphi^{(\alpha)} \in H_\alpha(G)\ (\alpha = 1, 2)$ が (0.1) で等号を満足するための完全条件は展開係数 $\{C_j^{(\alpha)}\}$, $\{C_j\}$ $(\in \ell^2)$ が次の3つの方程式のうちの1つを満足することである：

$$(1.15) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu S_{j,k}^{(\nu)} = C_j^{(1)} C_k^{(2)} \quad \text{for all } j \text{ and } k$$

$$(1.16) \qquad \sum_{\nu} C_\nu S_{j_0,k_0}^{(\nu)} \neq 0$$ なる任意に固定された j_0 と k_0 に対して，

$$\sum_{\nu}\sum_{\mu} C_\nu C_\mu S_{j,k}^{(\nu)} S_{j_0,k_0}^{(\mu)} = \sum_{\nu}\sum_{\mu} C_\nu C_\mu S_{j,k_0}^{(\nu)} S_{j_0,k}^{(\mu)}$$

$$\text{for all } j \text{ and } k$$

$$(1.17)\ C_j^{(1)} C_k^{(2)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\nu} C_\alpha^{(1)} C_\beta^{(2)} \overline{S_{\alpha,\beta}^{(\nu)}} \right) S_{j,k}^{(\nu)}$$

$$\text{for all } j \text{ and } k.$$

次に (0.1) で等号を満足する $\varphi^{(1)}(z)\varphi^{(2)}(z)$ の他の特徴付けを与えるために，$K_1(z,u)K_2(z,u)$ が H の D への制限によって得られる族 H_0 における再生核となっていること

とに注意する．ここで，任意のそのような制限 f に対して，その norm $\|f\|_0$ は，D に沿って $h(z,z)=f(z,z)$ なるすべての $h\in H$ に対する $\min\|h\|$ で与えられる（cf. [1], P. 365 定理 II）．このことから次のことが分る：

命題 1.3. $\varphi^{(\alpha)}\in H_\alpha(G)$ $(\alpha=1,2)$ に対して，(0.1) で等号が起きる完全な条件は次が成立することである：

(1.20) $\varphi^{(1)}(z_1)\varphi^{(2)}(z_2)=\left(\varphi^{(1)}(\zeta)\varphi^{(2)}(\zeta),\ K_1(\zeta,z_1)K_2(\zeta,z_2)\right)_0$

$$=\sum_j\left(\varphi^{(1)}(\zeta_1)\varphi^{(2)}(\zeta_2),\ \sigma_j(\zeta_1,\zeta_2)\right)\sigma_j(z_1,z_2).$$

一般に，任意の $f(z_1,z_2)\in H$ に対して

(1.21) $\left(f(\zeta,\zeta),\ K_1(\zeta,z_1)K_2(\zeta,z_2)\right)_0$

は，D に沿って $h(z,z)=f(z,z)$ なるすべての $h\in H$ のうちで $\|h\|$ を最小にする極値函数である．

2．$(H_{D(0)})^{\perp}$ が有限次元の場合．

$(H_{D(0)})^{\perp}$ が有限次元の場合には 命題1.2 における方程式がうまく解けて次の定理が得られる：

定理 2.1. 仮定 A1, A2, A3 の下で，$(H_{D(0)})^{\perp}$ が有

限次元ならば，2つのHilbert空間は正則な関係にある．

3、反例について、

まず，次のことを示す：

(I) 仮定A1とA2は，一般には，A3を意味しない．

Gを平面上の3重連結で正則な領域とする．$\{Z_j(z)\}_{j=1}^{2}$を∂Gに沿って実である正則微分の基底にとる．$H_1(G)=H_2(G)$を$\{Z_j(z)\}_{j=1}^{2}$によって生成されるHilbert空間とする．ここで，内積を

$$(f^{(1)}, f^{(2)}) = \sum_{\nu=1}^{2}\sum_{\mu=1}^{2} P_{\nu,\mu}\, \zeta_\nu^{(1)} \overline{\zeta_\mu^{(2)}} ;$$

$$f^{(\alpha)}(z) = \sum_{\nu=1}^{2} \zeta_\nu^{(\alpha)} Z_\nu(z)$$

で入れる．ただし，$\| P_{\nu,\mu} \|$は任意に固定された正値エルミート行列である（cf. [1]，346）．$Z_\alpha(u_\alpha)=0$ $(u_\alpha \in G;\ \alpha=1,2)$とおくと，$u_1 \neq u_2$であることに注意する．よって，$K(z,u_1)$と$K(z,u_2)$は一次独立である．$H = H_1(G) \otimes H_2(G)$の函数で$D$に沿って零となるものは定数$C$で次の形に表わされることが分る：

(3.1) $\quad C(Z_1(z_1)Z_2(z_2) - Z_2(z_1)Z_1(z_2))$、

このとき，$Z_1(z_1)Z_2(z_2) + Z_2(z_1)Z_1(z_2)$ は (3.1) および $K(z_1, u_\alpha)K(z_2, u_\alpha)$ ($\alpha = 1, 2$) と直交しているから求める反例となっている．

(II) 2つのHilbert空間は，一般には，正則な関係にはない．

実際，Gを平面上の正則な領域とし，$f(z)$をG上で零とならない函数とする．$H_1(G)$を$f(z)$によって生成される1次元Hilbert空間とし，$H_2(G)$をG上のBergman空間（あるいはSzegö空間，…）とする．このとき，Dに沿って零となるHのすべての函数は恒等的に零であるから，すべての積 $\varphi^{(1)}(z)\varphi^{(2)}(z)$ は (0.1) で等号を満たす．しかし，これらは核の積の形に表わされるとは限らないから，正則な関係にはないことが分る．

ここで，$H_1(G)$が1次元であること，$H_{D(0)}$が$\{0\}$であるという事実は本質的ではなく，さらに次のこともいえる：

(III) Hilbert空間とそれ自身は，一般には，正則な関係にはない．

実際，Uを単位円とし，U上のSzegö空間Sを考える．正規直交基底として，$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^j\right\}_{j=0}^{\infty}$を考える．そこで，$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^j\right\}_{j=0}^{N}$によって生成される$S$の部分空間$S_N$を考える．任意の$f(z_1, z_2) = \sum_{\nu}\sum_{\mu} \frac{1}{2\pi} A_{\nu,\mu} z_1^{\nu} z_2^{\mu} \in H = S_N \otimes S_N$に対して，Dに沿って零となる条件は

$$(3.2) \qquad \sum_{\nu+\mu=n} A_{\nu,\mu} = 0 \quad \text{for all } n : 2N \geqq n \geqq 0$$

である．ゆえに，任意の$\varphi^{(\alpha)}(z) = \sum_j a_j^{(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^j \in S_N$ $(\alpha = 1, 2)$に対して，

$$(\varphi^{(1)}(z_1)\varphi^{(2)}(z_2), f(z_1, z_2)) = 0 \quad \text{for all } f \in H_{D(0)}$$

なる条件は，(3.2)を満たすすべての$\{A_{\nu,\mu}\}$に対して

$$(3.3) \qquad \sum_{\nu}\sum_{\mu} a_{\nu}^{(1)} a_{\mu}^{(2)} \overline{A_{\nu,\mu}} = 0$$

という条件におきかえられる．ここで，$\varphi^{(1)}(z)$と$\varphi^{(2)}(z)$は一次従属であることは容易に分るから，$\varphi^{(1)}(z) \equiv \varphi^{(2)}(z)$と仮定してもよい．さて，任意に零でない$a_0^{(1)}$と$a_1^{(1)}$を固定する．$n = 2$の場合より，(3.2)と(3.3)から，$a_2^{(1)} = (a_1^{(1)})^2 / a_0^{(1)}$を得る．帰納的に，$a_j^{(1)} = a_0^{(1)} / (a_1^{(1)} / a_0^{(1)})^j$を得る．ゆえに

$$(3.4) \qquad \varphi^{(1)}(z) = a_0^{(1)} \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{a_1^{(1)}}{a_0^{(1)}}\right)^j \frac{z^j}{\sqrt{2\pi}}$$

を得る．つまり，$\varphi^{(\alpha)}(z)$ に対して，(0.1) で等号が成立する完全な条件はそれらが (3.4) の形で与えられることであることが分った．S_N の再生核は $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{j=0}^{N}\bar{u}^j z^j$ であるから，$\varphi^{(\alpha)}(z)$ は $|a_1^{(1)}/a_0^{(1)}|>1$ なる場合，核の定数倍で表わされないことになる．ゆえに S_N と S_N は正則な関係にはない．

ここで，$N\longrightarrow\infty$ としたとき，(3.3) の収束条件より $|a_1^{(1)}/a_0^{(1)}|<1$ でなければならず，したがって S と S 自身は正則な関係にあることになることに注意しよう．さらに，相異なる U の任意の点集合 $\{u_j\}_{j=0}^{N}$ に対して $\{K_N(z,\bar{u}_j)\}_{j=0}^{N}$ (K_N は S_N の再生核) は A1 と A2 を満足することが分るから，定理 3.1 において，もし A3 の仮定がなければ，その定理は一般には成立しないことに気付く．

以上の考察により，2つの Hilbert 空間が正則な関係にあるための条件を見い出すことは困難であると考えられるから，次の第2部では，compact bordered Riemann 面上の基本的な Hilbert 空間である Szegö 型空間と Bergman 空間の場合について考えることにする．

4．2つの Szegö 型空間の場合．

S を種数 n，境界成分 $\{C_\nu\}_{\nu=2n+1}^{2n+m}$ をもつ compact bordered

Riemann 面 $\bar{S}$ の内部とする．$W(z,t)$ を実部が $t\in S$ に極をもつ S の Green 函数 $g(z,t)$ である有理型函数とする．簡単のために，$\bar{S}$ 上の点とそのまわりの局所助変数 z を同一視する．任意の整数 g と，∂S 上の正の連続函数 $\rho(z)$ に対して次の norm が有限であるような位数 g の S 上の正則微分のなす Hilbert 空間を $H^{g}_{2,\rho}(S)$ で表わす：

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\partial S}|f(z)(dz)^{g}|^{2}\rho(z)\left(i\,dW(z,t)\right)^{1-2g}\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

ここで，$f(z)$ は ∂S における Fatou の意味における境界値を表わすものとする．$K_{g,t,\rho}(z,\bar{u})(dz)^{g}$ を $H^{g}_{2,\rho}(S)$ の再生核とし，$L_{g,t,\rho}(z,u)(dz)^{1-g}$ をその adjoint L-核とすると，次の基本的な関係が成立する：

$$\overline{K_{g,t,\rho}(z,\bar{u})(dz)^{g}}\ \rho(z)\left(i\,dW(z,t)\right)^{1-2g} \tag{4.1}$$

$$=\frac{1}{i}L_{g,t,\rho}(z,u)(dz)^{1-g}\quad \text{along } \partial S.$$

特に $K_{g,t,\rho}(z,\bar{u})$ と $L_{g,t,\rho}(z,u)$ は ∂S 上連続的に伸びていることに注意する．これらの核や g が整数でない場合の扱いについては [9], [11] を参照されたい．このとき，[12] より一般に次のことが成立する．特に [12] では Szegö 核の特殊性を用いていることに注意しておく．

定理 4.1. Szegö 型の任意の2つの空間 $H^p_{2,\rho}(S)$ と $H^q_{2,\sigma}(S)$ とは正則な関係にある.

証明. $\Omega(z)dz$ を $\bar{S}$ 上零とならない正則微分とする. $\varphi^{(p)} \in H^p_{2,\rho}(S)$ と $\varphi^{(q)} \in H^q_{2,\sigma}(S)$ に対して, (0.1) で等号が成立したら, 命題 1.1 より次が成立しなければならない:

$$(4.2)\quad \left(\varphi^{(p)}(z_1)\varphi^{(q)}(z_2),\ K_{p,t,\rho}(z_1,\bar{u}) \left[K_{q,t,\sigma}(z_2,\bar{v}) - \frac{K_{q,t,\sigma}(z_1,\bar{v})}{[\Omega(z_1)]^q}[\Omega(z_2)]^q \right] \right) = 0;$$

つまり,

$$(4.3)\quad \varphi^{(p)}(u)\varphi^{(q)}(v) = (\varphi^{(q)}, \Omega^q)_{q,\sigma}$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_{\partial S} \varphi^{(p)}(z_1)(dz_1)^p \overline{\left(\frac{K_{q,t,\sigma}(z_1,\bar{v})\, K_{p,t,\rho}(z_1,\bar{u})(dz_1)^p}{[\Omega(z_1)]^q} \right)}$$

$$\times\ \rho(z_1)(i\,dW(z_1,t))^{1-2q} \quad \text{for all } u, v \in S.$$

$(\varphi^{(p)}, \varphi^{(p)}_0)_{p,\rho} = 0$ なる $\varphi^{(p)}_0$ $(\neq 0)$ で $\bar{S}$ 上正則なものを1つとる. $(\varphi^{(q)}, \Omega^q)_{q,\sigma} \neq 0$ なる非自明な場合に, (4.3) から次を得る:

$$(4.4)\quad \int_{\partial S} \varphi^{(p)}(z)(dz)^p \overline{\left(\frac{K_{\delta,t,\sigma}(z,\bar{v})\ \varphi_0^{(p)}(z)(dz)^p}{[\Omega(z)]^\delta}\right)}$$

$$\times\ \rho(z)\,(i\,dW(z,t))^{1-2p} = 0$$

$$\text{for all } v \in S.$$

$\{K_{\delta,t,\sigma}(z,\bar{v})(dz)^\delta \mid v \in S\}$ の $H^\delta_{2,1}(S)$ での完全性より,

$$\int_{\partial S} \varphi^{(p)}(z)(dz)^p \overline{\left(\frac{f(z)\ \varphi_0^{(p)}(z)(dz)^p}{[\Omega(z)]^\delta}\right)}$$

$$\times\ \rho(z)\,(i\,dW(z,t))^{1-2p} = 0$$

$$\text{for all } f(z)(dz)^\delta \in H^\delta_{2,1}(S).$$

したがって, Cauchy-Read の定理から次を得る:

$$(4.5)\quad \overline{\varphi^{(p)}(z)(dz)^p}\ \rho(z)\,(i\,dW(z,t))^{1-2p}$$

$$= \frac{[\Omega(z)]^\delta\ F(z)(dz)^{1-p}}{\varphi_0^{(p)}(z)} \quad \text{along } \partial S;$$

$$F(z)(dz)^{1-p} \in H^{1-p}_{2,1}(S).$$

(4.5)より, $\varphi^{(p)}$ と F は ∂S上連続的に伸びることが分る.

$\varphi^{(p)}(z) \neq 0$ のとき,

$$(4.6)\quad (\varphi^{(p)}, \varphi^{(p)})_{p,\rho}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial S} \varphi^{(p)}(z)(dz)^p \frac{[\Omega(z)]^{\delta}\, F(z)(dz)^{1-p}}{\varphi_0^{(p)}(z)} > 0$$

から，$[\Omega(z)]^{\delta} F(z) / \varphi_0^{(p)}(z)$ は S にある有限個の極をもつことが分る．ゆえに次を得る：

$$(4.7)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\partial S} f(z)(dz)^p\ \overline{\varphi^{(p)}(z)(dz)^p}\ \rho(z)\ i\,dW(z,t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial S} f(z)\frac{[\Omega(z)]^{\delta} F(z)}{\varphi_0^{(p)}(z)}\,dz$$

$$= \sum_{\nu}\sum_{\mu} \overline{X_{\nu,\mu}}\ f^{(\nu)}(P_\mu);$$

for all $f(z)(dz)^p \in H^p_{2,\rho}(S)$，$P_\mu$ は S のある有限の点集合，$\{X_{\nu,\mu}\}$ はある定数．

したがって，$\varphi^{(p)}$ の次の表現を得る：

$$(4.8)\quad \varphi^{(p)}(z) = \sum_{\nu}\sum_{\mu} X_{\nu,\mu}\frac{\partial^{\nu} K_{p,t,\rho}(z,\overline{P_\mu})}{\partial \overline{P_\mu}^{\,\nu}}.$$

(4.3) と (4.8) から，$\varphi^{(\delta)}$ の次の表現を得る：

$$(4.9)\quad \varphi^{(g)}(z) = \sum_{\nu}\sum_{\mu} Y_{\nu,\mu} \frac{\partial^{\nu} K_{g,t,\sigma}(z, \overline{P_\mu})}{\partial \overline{P_\mu}^{\nu}};$$

$\{Y_{\nu,\mu}\}$は定数.

ゆえに，(4.3),(4.8),(4.9) とから次を得る：

$$(4.10)\quad \sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\nu'}\sum_{\mu'} X_{\nu,\mu} Y_{\nu',\mu'} \frac{\partial^{\nu} K_{p,t,\rho}(u,\overline{P_\mu})}{\partial \overline{P_\mu}^{\nu}} \quad \frac{\partial^{\nu'} K_{g,t,\sigma}(v,\overline{P_{\mu'}})}{\partial \overline{P_{\mu'}}^{\nu'}}$$

$$\equiv \sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\nu'}\sum_{\mu'} X_{\nu,\mu} Y_{\nu',\mu'} \frac{\partial^{\nu}}{\partial \overline{P_\mu}^{\nu}} \left(\frac{K_{p,t,\rho}(u,\overline{P_\mu}) K_{g,t,\sigma}(v,\overline{P_\mu})}{\overline{[\Omega(P_\mu)]^{g}}} \right) \frac{\partial^{\nu'} \overline{[\Omega(P_{\mu'})]}^{g}}{\partial \overline{P_{\mu'}}^{\nu'}}$$

ゆえに，(4.1) から次を得る：

$$(4.11)\quad \sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\nu'}\sum_{\mu'} \overline{X_{\nu,\mu}}\ \overline{Y_{\nu',\mu'}} \frac{\partial^{\nu} L_{p,t,\rho}(u,P_\mu)}{\partial P_\mu^{\nu}} \quad \frac{\partial^{\nu'} L_{g,t,\sigma}(v,P_{\mu'})}{\partial P_{\mu'}^{\nu'}}$$

$$\equiv \sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\nu'}\sum_{\mu'} \overline{X_{\nu,\mu}}\ \overline{Y_{\nu',\mu'}} \frac{\partial^{\nu}}{\partial P_\mu^{\nu}} \left(\frac{L_{p,t,\rho}(u,P_\mu) L_{g,t,\sigma}(v,P_\mu)}{[\Omega(P_\mu)]^{g}} \right) \frac{\partial^{\nu'} [\Omega(P_{\mu'})]^{g}}{\partial P_{\mu}^{\nu}}$$

ここで，$u = v$ とおき両辺の極の位数を比べることにより，$\nu' \neq 0$ なるすべての ν' と μ' に対して $Y_{\nu',\mu'} = 0$ を得る．また，(4.11) を vの恒等式とみることにより，$\nu \neq 0$ なるすべての ν と μ に対して，$X_{\nu,\mu} = 0$ を得る。ゆえに次を得る：

$$(4.12)\quad \left(\sum_{\mu} \overline{X_{0,\mu}} L_{p,t,\rho}(u,P_\mu)\right)\left(\sum_{\mu'} \overline{Y_{0,\mu'}} L_{g,t,\sigma}(v,P_{\mu'})\right)$$

$$\equiv \left\{ \sum_{\mu} \overline{X_{0,\mu}} \left(\frac{L_{p,t,\rho}(u, P_\mu) L_{q,t,\sigma}(v, P_\mu)}{[\Omega(P_\mu)]^q} \right) \right\} \left(\sum_{\mu'} \overline{Y_{0,\mu'}} [\Omega(P_{\mu'})]^q \right)$$

もし零でない X_{0,μ_0} が存在すれば，(4.12) を u の恒等式と考えて，P_{0,μ_0} の近傍から次を得る：

$$\sum_{\mu'} \overline{Y_{0,\mu'}} L_{q,t,\sigma}(v, P_{\mu'})$$

$$\equiv \frac{L_{q,t,\sigma}(v, P_{\mu_0})}{[\Omega(P_{\mu_0})]^q} \left(\sum_{\mu'} \overline{Y_{0,\mu'}} [\Omega(P_{\mu'})]^q \right).$$

ゆえに，$\mu' \neq \mu_0$ なるすべての μ' に対して $Y_{0,\mu'} = 0$, したがって $\mu \neq \mu_0$ なるすべての μ に対して $X_{0,\mu} = 0$ を得る．ゆえに定理は証明された．

5. Bergman空間の場合．

M を S 上

(5.1) $$\iint_S |f(z)|^2 \, dx\,dy < \infty \quad (z = x + iy)$$

なる正則微分からなる Bergman 空間とする．$\{C_\nu\}_{\nu=1}^{2n+m-1}$ を S の canonical homology basis とする．$F = F(C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_a})$ を

(5.2) $$\int_{C_{j_\lambda}} f(z)\,dz = 0 \quad \lambda = 1, 2, \ldots, a$$

なる条件を満足するMの部分空間とする．$K_F(z,\overline{u})$および$L_F(z,u)$をF族のBergman核およびそれに対応するL–核とする．$L_F(z,u)$は$\overline{S}$上meromorphicで，$z=u$のみで次の形のdouble poleをもつ：

$$(5.3) \qquad L_F(z,u)\,dz = \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{1}{(z-u)^2} + \text{regular terms} \right\} dz.$$

特に，$L_F(z,u)$は$K_F(z,u)$と次の重要な関係があることに注意する：

$$(5.4) \qquad -\overline{K_F(z,\overline{u})\,dz} = L_F(z,u)\,dz \quad \text{along } \partial S.$$

これらの核函数の性質については[14]を参照されたい．M族のBergman核を$K(z,\overline{u})$および$L(z,u)$で表わす．このとき，次の定理が得られる：

定理5.1. Bergman空間Mと任意のFとは正則な関係にある．

まずGunning–Narasimhan [4]の結果より，$\overline{S}$上正則で，$\overline{S}$上零とならないexactな微分$\Omega_E(z)\,dz$が存在することに注意する．$\varphi_M \in M$と$\varphi_F \in F$に対して，(0.1)における等号が成立すれば(4.2)におけるように

次が成立しなければならない：

$$(5.5)\quad \left(\varphi_M(z_1)\varphi_F(z_2),\ K(z_1,\bar{u})\left[K_F(z_2,\bar{v}) - \frac{K_F(z_1,\bar{v})}{\Omega_E(z_1)}\Omega_E(z_2)\right]\right) = 0$$

$$\text{for all } u, v \in S.$$

これから函数方程式を導き，φ_M と φ_F の形を決定することになるが，特に (5.4) と次の M. Schiffer [13] (cf. [3]) の結果が重要な役割を果す：

$L_2(S)$ 可積分な微分 $h(z)dz$ に対して，

$$\iint_S h(z)\overline{f(z)}\,dx\,dy = 0 \quad \text{for all } f \in M$$

ならば，$h(z)$ は以下の条件を満足する $H(z)$ によって次のようにかける：

$$h(z) = i\,\frac{\partial H(z)}{\partial z} \quad \text{on } S,$$

ここで，$H,\ \dfrac{\partial H}{\partial z} \in L_2(S)$ で H は Weyl の条件を満たす：

$$\iint_S H(z)\cdot\Delta\varphi(z)\,dx\,dy = 0,$$

for all smooth functions φ on S.

6. Szegö 型空間と Bergman 空間の場合.

第4節と第5節の方法によって次のことが分る:

定理 6.1. 任意の Szegö 型空間 $H^p_{2,\rho}(S)$ と任意の $\mathbb{F}$ 族の Bergman 空間は正則な関係にある.

$\varphi \in H^p_{2,\rho}(S)$ と $\varphi_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ に対して, (0.1) で等号が成立すれば,

$$(6.1)\quad \left(\varphi(z_1)\varphi_{\mathbb{F}}(z_2),\ K_{p,t,\rho}(z_1,\overline{u})\left[K_{\mathbb{F}}(z_2,\overline{v}) - \frac{K_{\mathbb{F}}(z_1,\overline{v})}{\Omega_E(z_1)}\Omega_E(z_2)\right]\right) = 0$$

for all $u, v \in S$,

が成立しなければならないことを用いる.

7、整函数のなす Fischer 空間の場合.

最後に今まで考えて来た空間と異なる性質をもち，しかもその正則性が簡単に分る場合として，Fischer 空間の場合を考える．$\mathfrak{F}$を有限 norm

$$\left\{\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \exp(-|z|^2)\, dx\, dy\right\}^{\frac{1}{2}} < \infty$$

をもつ整函数の族のなす Fischer 空間とする．$\mathfrak{F}$の再生核 $K_{\mathfrak{F}}(z, \bar{u})$ は $\exp(\bar{u}\cdot z)$ で与えられることが知られている（Cf. [2], [7], [8]）．このとき，次が分る：

定理 7.1．$\mathfrak{F}$と$\mathfrak{F}$自身は正則な関係にある．

証明．$\varphi, \psi \in \mathfrak{F}$ に対して，(0.1)で等号が起きれば，まずφとψ は従属な関係にあることは容易に分るから，$\varphi(z) \equiv \psi(z)$ として考えてもよい．

$$\left(\varphi(z_1)\varphi(z_2),\ K_{\mathfrak{F}}(z_1, \bar{u})(K_{\mathfrak{F}}(z_2, \bar{v}) - K_{\mathfrak{F}}(z_1, \bar{v})\right)$$
$$= 0 \quad \text{for all } u, v \in S,$$

より

$$\varphi(u)\varphi(v) = (\varphi(z_2), 1)_{\mathfrak{F}}$$
$$\times \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \varphi(z_1)\overline{K_{\mathfrak{F}}(z_1, \bar{u})K_{\mathfrak{F}}(z_1, \bar{v})} \exp(-|z_1|^2)\, dx_1\, dy_1$$

を得る．$K_{\mathfrak{z}}(z,\bar{u})K_{\mathfrak{z}}(z,\bar{v}) \equiv K_{\mathfrak{z}}(z,\overline{u+v})$ であるから，次の函数方程式を得る：

$$\varphi(u)\varphi(v) = (\varphi, 1)_{\mathfrak{z}}\ \varphi(u+v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{C}.$$

よって求める主張を得る．

8．完全性についての注意．

例えば，定理 4.1 の証明との関係において，

$$(8.1)\qquad \left\{ K_{p,t,\rho}(z_1,\bar{u})\left[K_{q,t,\sigma}(z_2,\bar{v}) - \frac{K_{q,t,\sigma}(z_1,\bar{v})}{[\Omega(z_1)]^{q}}\Omega(z_2)^{q}\right] \,\middle|\, u, v \in S \right\}$$

が $[H^{p}_{2,\rho}(S) \otimes H^{q}_{2,\sigma}(S)]_{D(0)}$ で完全であるかを問題にするのは自然なことである．簡単な計算により，この問題は

$$\left\{ K_{p,t,\rho}(z,\bar{u})K_{q,t,\sigma}(z,\bar{u})(dz)^{p+q} \,\middle|\, u \in S \right\}$$

の $H^{p+q}_{2,1}(S)$ における完全性の問題におきかえられることが分る．後の問題は $p+q=1$，$\rho\sigma \equiv 1$ の場合肯定的に与えられているから[11，定理 5.1]，結果として次の定理が得られる：

定理 8.1.

$$\left\{ K_{p,t,\rho}(z_1, \overline{u}) \left[K_{1-p,t,\rho^{-1}}(z_2, \overline{v}) - \frac{K_{1-p,t,\rho^{-1}}(z_1, \overline{v})}{[\Omega(z_1)]^{1-p}} [\Omega(z_2)]^{1-p} \right] \middle| u, v \in S \right\}$$

は $[H^p_{2,\rho}(S) \otimes H^{1-p}_{2,\rho^{-1}}(S)]_{D(0)}$ で完全である.

第2部において，正則性の証明に (4.2), (5.4), (6.1) 等を用いているから，一般領域や調和函数族等に対してはそれらの証明は適用できず，正則性の問題は一般には非常に難しい問題を含んでいるものと思われる。

REFERENCES

1. N. Aronszajn, Theory of reproducing kernel, Trans. Amer. Math. Soc., 68(1950), 337-404.

2. V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I, Comm. Pure Appl. Math., 14(1961), 187-214.

3. J. Burbea, Minimum methods in Hilbert spaces with kernel function, Thesis, Stanford University, 1971.

4. R. Gunning and R. Narasimhan, Immertion of open Riemann surfaces, Math. Ann., 174(1967), 103-105.

5. H. Meschkowski, Hilbertche Räume mit Kernfunktion, Berlin, 1962.

6. J. v. Neumann and F. J. Murray, On rings of operators, Ann. of Math., 37(1936), 116-229.

7. D. J. Newman and H.S. Shapiro, Certain Hilbert spaces of entire functions , Bull. Amer. Math. Soc., 72(1966), 971-977.

8. __________ , Fischer spaces of entire functions, Proc. Symp. Pure Math. A. M. S. 11(1966) 360-369.

9. S. Saitoh, The kernel functions of Szegö type on Riemann surfaces, Kōdai Math. Sem. Rep., 24(1972), 410-421.

10. ______ , On some completenesses of the Bergman kernel and the Rudin kernel, Pacific J. Math. 56(1975), 581-596.

11. ______ , The exact Bergman kernel and the kernels of Szegö type, Pacific J. Math., 71(1977), 545-557.

12. ______ , The Bergman norm and the Szegö norm, Trans. Amer. Math. Soc.

13. M. Schiffer, Fredholm eigenvalues and conformal mapping, Rend. Math. e Appl., 22(1963), 447-468.

14. M. Schiffer and D. C. Spencer, Functionals of Finite Riemann Surfaces, Princeton University Press., (1954).