

Hardy Class, N Class

千葉大 理 柳原二郎

Hardy class と N class について, 述小子ハ至ニトハ99ニ
 如, ニニ下ニハ 合成作用素 とそれに関連した関数方程式を
 考ニよう.

1. 序論

D は単位円板 $|z| < 1$ とし, D 上正則な関数 $f(z)$ 如, 条件

$|f|^p$ 如 harmonic majorant 在也

をみたすとき H^p class に属するといひ, 条件

$|f|$ 如 有界な harmonic majorant 在也

をみたすとき H^∞ class に属するといひ. また, 条件

$\log^+ |f|$ 如 harmonic majorant 在也

をみたすとき N class に属するといひ, 条件

$\log^+ |f|$ 如 準有界な harmonic majorant 在也

をみたすとき N^+ class に属するといひ. また

$$M = \{ \phi \in H^\infty ; |\phi(z)| < 1 \text{ for } z \in D \}$$

とおく. $\phi \in M$ をとり, D 上の正則関数 g に対し

$$C_\phi g = g \circ \phi, \text{ 亦即ち } (C_\phi g)(z) = g(\phi(z))$$

とおく. C_ϕ を, ϕ に対応する 合成作用素 とする.

C_ϕ は $H^p \rightarrow H^p$ の連続な線形作用素である [5, p. 348, 定理 1], [1, p. 29, 系]. また

定理 1.1. C_ϕ は $N^+ \rightarrow N^+$ の連続な準同型で, ϕ は定数関数でないならば C_ϕ は 1 対 1 である. 逆に N^+ を N^+ の中から連続な準同型は, 合成作用素に限る.

(N^+ には $S(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})|) d\theta$ として距離を入っており, N^+ は位相代数となっている.)

証明. 後半を示そう. κ は N^+ の連続な準同型である. $f \in N^+ - \ker(\kappa)$ をとり $\kappa f = \kappa(1 \cdot f) = \kappa 1 \cdot \kappa f$. よって $\kappa 1 = 1$. いま $\kappa z = \phi \in N^+$ とおく. $a \in |a| \geq 1$ は任意の数とすれば, $(z-a)^{-1} \in N^+$ であるから $\kappa(z-a)\kappa\left(\frac{1}{z-a}\right) = 1$, かつ $\kappa(z-a) = \kappa z - \kappa a = \phi - a$ は D 内 $\neq 0$ とおれば, 従って $|\phi(z)| < 1$ for $z \in D$, 亦即ち $\phi \in M$. $f(z) = \sum a_n z^n \in N^+$ に対し, $0 < r < 1$ をとり $f_r(z) = f(rz)$ とおく. すると $(\kappa f_r)(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k r^k z^k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k r^k \phi^k = (f_r \circ \phi)(z) = (C_\phi f_r)(z)$. $r \rightarrow 1$ のとき $f_r \rightarrow f$ かつ $\kappa f = C_\phi f$ とある. 証明終.

2. 完全連続な合成作用素

$\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ は定備な位相線形空間とす。 $T: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$ は線形かつ連続とす。 \mathcal{S}_1 での 0 の異なる近傍 U があり、 TU が \mathcal{S}_2 で相対コンパクトと存在するとき、 T は 完全連続 としゆ。

補題 2.1. C_φ が H^p 上 (または N^+ 上) で完全連続ならば、
ほとんどすべての t に對し $|\varphi(e^{it})| < 1$ 。

証明は [6, p. 477, 命題 1.6 (a)] をみよ。

補題 2.2. $f \in H^p$ (または N^+) で、 $\varphi \in M$ ならば

$$\underline{(f \circ \varphi)(e^{it}) = f(\varphi(e^{it})) \quad \text{a. e.}}$$

証明は [5, p. 350, 定理 2] をみよ。

Shapiro - Taylor [6] は C_φ が完全連続に存在するための条件をいろいろと調べている。 ひとつは

定理 2.3. C_φ が H^2 上 Hilbert-Schmidt 型と存在するための
必要十分条件は、 φ が

$$(2.1) \quad \int_0^{2\pi} [1 - |\varphi(e^{it})|]^{-1} dt < \infty$$

をみたすことである [6, p. 481, 定理 3.1]。

定理 2.4. C_φ が、ある $p < \infty$ に對し、 H^p 上で完全連続ならば、
すべての $p < \infty$ に對し、 H^p 上で完全連続である
了 [6, p. 492, 定理 6.1]。

N^+ 上では, 完全連続となるための必要十分条件が求めら
れた。存在あり

定理 2.5. C_φ が N^+ 上で完全連続であるための条件は

$$(2.2) \quad |\varphi(e^{it})| < 1 \quad \text{a.e.}$$

であつてかつ, 各 θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に対し

$$(2.3) \quad \frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} k_0(t) dt + i\alpha(\theta)$$

が成り立つことである。ここで $\alpha(\theta)$ は実数値の連続関数,
 $k_0(t)$ は $k_0(t) \geq 0$ かつ θ に関して一様に可積分 (存在
あり, $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ あり, $\text{meas}(E) < \delta$,
 $E \subset [0, 2\pi]$, のときすなわち θ に対し $\int_E k_0(t) dt < \varepsilon$
とあり) とする。

証明. 必要十分. $\mathcal{U}(\eta_0) = \{f \in N^+; S(f, 0) < \eta_0\}$ は
 $C_\varphi \mathcal{U}(\eta_0)$ が相対コンパクトな近傍とあり. $f_r(z) = \frac{\eta_0}{4} \exp\left[\frac{\eta_0}{4} \frac{e^{i\theta} + rz}{e^{i\theta} - rz}\right]$
とおく. $\delta > 0$ 且 $2\delta \log 2 < \frac{\eta_0}{4}$ とし, $r_0 > 0$ 且 $|f_r(e^{it})|$
 $< \frac{\eta_0}{3}$ if $|t - \theta| \geq \delta, r \geq r_0$, なるようにとす. すると $r_0 \leq r < 1$
のとき $f_r \in \mathcal{U}(\eta_0)$ であり, $f_r \rightarrow \{f_r \circ \varphi\}_{r \geq r_0}$ は N^+ 上
相対コンパクト. よつて $\frac{\eta_0}{4} \exp\left[\frac{\eta_0}{4} \frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)}\right] = \lim_{r \rightarrow 1} f_r(z)$
 $\in N^+$. 同様に

$$\frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu_\theta(t) + i\alpha(\theta)$$

と有り, $d\mu_\theta(t) = k_\theta(t)dt + d\nu_\theta(t)$ 7, $d\nu_\theta(t) \leq 0$ は 特異測度. しかし $\operatorname{Re}\left[\frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)}\right] \geq 0$ 42, $d\nu_\theta(t) = 0$. 明らかなら $k_\theta(t) \geq 0$. 23 n, $\theta_n \rightarrow \theta$ 23 $\frac{e^{i\theta_n} + \varphi(z)}{e^{i\theta_n} - \varphi(z)} \rightarrow \frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)}$ 故から $\int_0^{2\pi} h(t) k_{\theta_n}(t) dt \rightarrow \int_0^{2\pi} h(t) k_\theta(t) dt \quad \forall h(\theta) \in C[0, 2\pi]$.
 577 $k_{\theta_n}(t) \rightarrow k_\theta(t)$ a.e. 77 かつ 項別積分可能故から 一括可積分7. 57.

45 存在. $V = \{f \in N^+; S(f, 0) < \infty\}$ 23 7, $\{f_n\} \subset V$ 23 7. 容易にわかる57 n, $\{f_n\}$ は D 内77 一致収束 57 7 23 7. $F_n(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log^+ |f_n(e^{i\theta})| d\theta\right]$ 23 57 7 $|F_n(z)| \geq 1$. $\{F_n\}$ は D 内77 一致収束 57 7 23 7 23 7. $|\varphi(e^{it})| < 1$ a.e. 故から $(F_n \circ \varphi)(e^{it}) \rightarrow (F \circ \varphi)(e^{it})$ a.e. 77 $\int \log^+ |f_n(e^{i\theta})| d\theta \rightarrow d\mu(\theta)$ 23 7 7 7 7 7. $f_n \rightarrow f, F_n \rightarrow F$ 23 57 7 $\log(F \circ \varphi)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} - \varphi(z)} d\mu(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\mu(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} k_\theta(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha d\mu$. $\{k_\theta(t)\}$ の 一括可積分性から $d\pi(t) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} k_\theta(t) dt d\mu(\theta)$ は dt に 関して 絶対連続7, 57 7

$$(F \circ \varphi)(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} g(t) dt + i\beta\right] \quad (\beta = \text{実定数})$$

23 7, $g(t) \geq 0, g(t) \in L^1[0, 2\pi]$. 57 7 $\{\log |(F_n \circ \varphi)(e^{it})|\}$ は 項別積分可能7, $\log^+ |(f_n \circ \varphi)(e^{it})| \leq \log |(F_n \circ \varphi)(e^{it})|$ 故から $\{\log^+ |(f_n \circ \varphi)(e^{it})|\}$ は 一括可積分 (n=1 関して). 23 7 7 7 $\{\log(1 + |(f_n \circ \varphi)(e^{it})|)\}$ は 項別積分可能7, 57 7 N^+ に

亦して $f_n \circ \varphi \rightarrow f \circ \varphi$. 証明.

二の証明から

系 2.6. $U(\eta) = \{f \in N^+; \rho(f, 0) < \eta\}$ とおく. あり η_0 に對し $C_\varphi U(\eta_0)$ が相對コンパクトならば, 全ての η に對し $C_\varphi U(\eta)$ が相對コンパクトである.

また

系 2.7. $\varphi \in M$ が (2.1) を満たせば, C_φ は N^+ 上で完全連続である.

定理 2.4 に関連して, つぎの二つを考慮せよ:

- (1) C_φ がある φ に對し H^p 上で完全連続ならば, N^+ 上でも完全連続か?
- (2) C_φ が N^+ 上で完全連続ならば, H^p 上ではどうか.

筆者は二つに答えることができない。(2) は肯定的であるが (1) は否定的であると思ふ。

3. Schröder の方程式

単位円板 D を $w = f(z)$ によって領域 G に写し, $\varphi \in M$ に對して つぎの図が可換に存在するとすると, $f \circ \varphi = g \circ f$.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & D \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ G & \xrightarrow{g} & G \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{とくに } g: G \rightarrow G \text{ が 1 次同射} \\ \text{となつてゐるとすれば} \end{array}$$

$$(3.1) \quad f(\varphi(z)) = C f(z), \quad \text{すなわち } C_\varphi f = C f.$$

(3.1) を Schröder の方程式 とする。

(3.1) の解の存在はよく知られている [4]. $C \neq (\varphi'(0))^k$ for $k = 0, 1, 2, \dots$ ならば (3.1) の解は trivial なものしか存在しない。逆に

定理 3.1. C_φ は N^+ 上で完全連続とする。このとき (3.1) の解は N^+ に属し, $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} C^{-n} g \circ \varphi \circ \dots \circ \varphi$ と与えられる。ここで $C = (\varphi'(0))^k$ とし, $g(z)$ は $g(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0, g^{(k)}(0) \neq 0$ とみえる N^+ の任意の関数がある。

(3.1) を $\log f(z) = F(z), \log C = C'$ とおけば, Abel 方程式 $F(\varphi(z)) = F(z) + C'$ となる。適当な 1 次変換によって $C' = 1$ とおき, $F^{-1} = \Psi$ とおくと, 差分方程式 $\Psi(w+1) = \varphi(\Psi(w))$ を得る。 $1/\Psi(w) = \psi(w), 1/\varphi(1/z) = \gamma(z)$ とおけば,

$$(3.2) \quad \Psi(w+1) = \gamma(\Psi(w)) = C_1 \Psi(w) + C_0 + \sum C_m (\Psi(w))^{-m}$$

とおく。 $\varphi(0) = 0$, しなから $\gamma(z) = C_1 z + C_0 + \sum C_m z^{-m}$ と

する。適当な 1 次変換によって (3.2) はさらに

$$(3.3) \quad \Psi(w+1) = \Psi(w) + 1 + \frac{\lambda_1}{\Psi(w)} + \frac{\lambda_2}{\Psi(w)^2} + \dots$$

となる。ここで $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0$ の場合について考える

と簡単な差分方程式

$$(3.4) \quad \Psi(w+1) = \Psi(w) + 1 + \lambda / \Psi(w)$$

を得る。これは T. Kimura によって研究された方程式である [2], [3], [7]。この方程式の有理型な解の構造は決定された [8], [9]。証明には, \mathcal{N}_g 集合の若干の性質を用いる。

- [1] P.L. Duren, Theory of H^p spaces. Academic Press, 1970.
- [2] T. Kimura, On the iteration of analytic functions. Funkc. Ekv., 14 (1971), 197-238.
- [3] T. Kimura, On meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$. Lecture Notes in Math., #312, Springer-Verlag, 1973.
- [4] E. Picard, Leçons sur Quelques Équations Fonctionnelles avec des Applications à divers Problèmes d'Analyse et de Physique Mathématique. Gauthier-Villars, 1928.
- [5] J.V. Ryff, Subordinate H^p functions. Duke Math. J. 33 (1966), 347-354.
- [6] J.H. Shapiro and P.D. Taylor, Compact, nuclear, and Hilbert-Schmidt Composition operators on H^2 . Indiana Univ. Math. J., 23 (1973), 471-496.
- [7] K. Takano, On hypertranscendancy of solutions of a difference equation of Kimura. Funkc. Ekv., 16 (1973), 241-254.
- [8] N. Yanagihara, Meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$, I. Ibid, to appear.
- [9] N. Yanagihara, Meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1) = y(x) + 1 + \lambda/y(x)$, II. Ibid, to appear.