数理解析研究所講究録
324巻 1978年 29-39

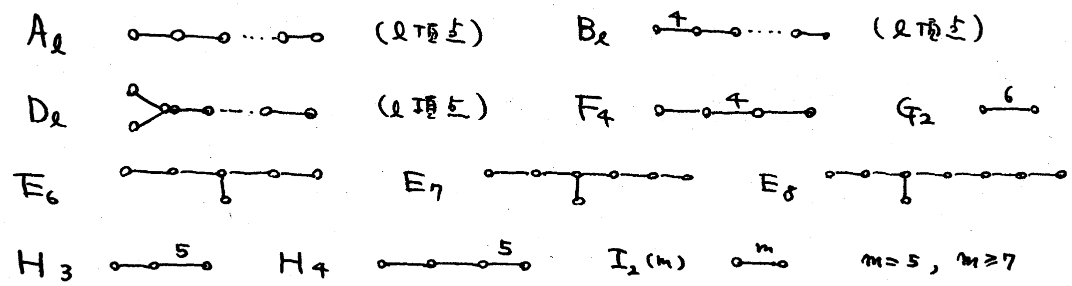
有限鏡映群の不変式 — 特にE型 —

埼玉大　理　矢野　環
京都大　理　関口　次郎

§0.　ユークリッド空間　$E = \mathbb{R}^l$　における，鏡映から生成された有限群は，完全に決定され，Coxeter群と呼ばれて色々な性質がしらべられている。（Bourbaki : Lie Algebra 4,5）

Eへの作用が既約であるものを，既約Coxeter群と呼ぶことにする．既約Coxeter群 W_l は，l個の鏡映からなる生成元の集合 $S = \{s_1, \cdots, s_l\}$ をもち，W_l はそれら s_i 間の基本関係式　$(s_i s_j)^{m_{ij}} = e$，$s_i^2 = e$　によって定まる群となる．ここに m_{ij} は自然数 $\geqq 2$ であり，$m_{ij} \geqq 3$ の時，$\overset{\circ}{s_i}$ と $\overset{\circ}{s_j}$ を，上に m_{ij} を書きそえた線分で結ぶことにより，グラフを得る．これを (W_l, S) のグラフと呼ぶ．既約Coxeter群のグラフは，次のものに限る．（一般のCoxeter群は既約Coxeter群の直積となり，そのグラフは，グラフの和集合となる。）．線分上に書きそえる数字は，$m_{ij} \geqq 4$ のときのみ記す．

表1　(W_l, S)



このうち上3行は，Lie環のRoot系のWeyl群に対応するものである．第4行は，2，3，4次元における，例外的な正多面体の合同群である．（A_l, B_l, は l次元での正$l+1$，$2l$面体の合同群．B_lをC_lと見れば正2^l面体のそれ．F_4, H_4は4次元の正24面体，正120（又は600）面体，H_3は3次元の正12（又は20）面体，$I_2(m)$は（m=6にも）正m角形のそれぞれ合同群である．）

E（又はdual E^*）のsymmetric algebraへW_lは自然に作用するが，その不変式環について次のことが知られている．

定理 1 $R = S(E^*)^{W_l}$ は$\underbrace{\text{多項式環}}_{l\text{変数}}$に同型であり，同次式により生成される．

即ち，E^*のbasisを$\xi_1, \cdots, \xi_l$とするとき，$R=\mathbb{R}[x_1,\cdots,x_l]$となり各$x_i$は$\{\xi_j\}$の同次$m_i$次式であるようにとれる．

表2 (m_i)

A_l : $m_i = i+1$ B_l : $m_i = 2i$

D_l : $l=2k$ $m_i=2i$ $i\leq k$, $m_i=2(i-1)$ $i>k$
$l=2k+1$ $m_i=2i$ $i\leq k$, $m_{k+1}=l$, $m_i=2(i-1)$ $i>k+1$ F_4: 2, 6, 8, 12 G_2: 2, 6

E_6: 2, 5, 6, 9, 8, 12 E_7: 2, 6, 8, 10, 12, 14, 18 E_8: 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30

H_3: 2, 6, 10 H_4: 2, 12, 20, 30 $I_2(m)$: 2, m

x_i の具体的な形は，$A_\ell, B_\ell, D_\ell, I_2(m)$ については比較的容易にあたえうるが，他の場合については，殆ど存在証明の域を出ていないのが実状であった．J. S. Frame [ ] は特殊な座標系を用いて E_6 の不変式を表示している．又，A. Borel - F. Hirzebruch [ ] は F_4 の x_2, x_6, x_8 について言及している。

我々は，後にのべる研究の必要上，すべての不変式を，explicit に決定することとなった。

以下 W_ℓ は既約 Coxeter 群とする．又，$m_1 \leq \cdots \leq m_\ell$ を仮定する．

§1 行列 $M(W_\ell)$

E の正規直交基を $\{e_i\}$ その dual basis を $\{\xi_i\}$ としよう．$W_\ell \hookrightarrow O(E)$ $(O(E^*))$(直交群) とみなせることより，2次の不変式は(一つしかない以上) $x_1 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_\ell^2$ とればよい．

$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial \xi_\ell}\right)$ と定める．$W_\ell \hookrightarrow O(E^*)$ を用いて，

$Dx_i \cdot Dx_j$ は不変式となることがわかる．そこで

定義2 $m_{ij}(x) = \frac{1}{2} Dx_i \cdot Dx_j$,

$$M(W_\ell) = (m_{ij}(x))_{i,j=1,\ell} \qquad (\text{対称行列})$$

この行列 $M(W_\ell)$ について，斎藤恭司氏並びに我々は，次の事実を予想している。

予想3. 適当な不変式の生成元 $y_1, \dots, y_\ell$ が存在して，

$$M(W_\ell) = (m_{ij}(y))_{i,j=1,\ell}$$

の anti-diagonal $m_{i,l-i}(y)$ 以外には，最高次基本不変式 y_l があらわれない。

そのような例はもし存在するなら，本質的に unique である．我々の求めた不変式を用いて調べたところ，A_l, B_l, D_l の l の小さい場合，F_4, G_2, E_6, H_3, H_4, $I_2(m)$ については予想の成立が確かめられている。これらの場合，$m_{i,l-i}(y)$ は真に y_l を含んでいる．この y_l を含む（実際，weight をみれば y_l の定数倍を含む）ことは，A_l, D_l, E_l については斎藤氏の別の根拠より保証されてもいることであり，B_l については，不変式の形よりわかる．従って，特に

$$\det M(W_l) = c\, y_l^{\,l} + \cdots \qquad (c \neq 0)$$

という形をしている。この式，あるいは予想の幾何学的意味は現在不明である．簡単な一例をあげておこう．

$I_2(m)$ $\quad$ ($I_2(3)=A_2$, $I_2(4)=B_2$, $I_2(6)=G_2$, $I_2(2)=A_1\times A_1$)

$$x_1 = \xi_1^2+\xi_2^2, \qquad x_2 = (-2)^m \prod_{i=0}^{m-1}(\cos(i\alpha)\xi_1+\sin(i\alpha)\xi_2) \quad \alpha=\frac{\pi}{m}$$

とおくと，
$$M(I_2(m)) = \begin{pmatrix} 2x_1 & m x_2 \\ m x_2 & 2m^2 x_1^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\det M(I_2(m)) = -m^2 \left(x_2^2 - 4x_1^m \right)$$

ここで，$M(W_l)$ の重要性について一言しておく．

$\det M(W_l) = f(x)$ とおこう．ベクトル場 X_i を

$X_i = \sum m_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$ と定めるとき，$\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{l} \mathcal{O} X_i$

は，ちょうど $f(x)$ を不変にする Vector 場の全体になっていることが；斎藤氏の log pole の一般論よりわかる．そして $f(x)$ の複素巾 $f(x)^{\alpha}$ の解析的性質が，$\mathfrak{g}$ を通じて充分調べることができる．これについては T. Yano - J. Sekiguchi [1][2] を参照されたい。我々は，その研究のために不変式を決定したのであった．

§2. 不変式の構成．

W_l の不変式 $x_1, \cdots, x_l$ の構成を，直接に ξ_i の多項式として行なうことは，しばしば非常に複雑化する．そこで，次の方法を採用する．

W_l の適当な部分群 W_{l-1} で，(W_l, S) のグラフの subgraph で表わされるものをとり，表現空間 V の正規直交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_{l-1}, e_l$ を，$\{e_1, \cdots, e_{l-1}\}$ に W_{l-1} が作用しているようにとる．$V \ni \sum_{i=1}^{l-1} \xi_i e_i + t e_l$ により dual V^* の座標を定める．W_{l-1} の基本不変式 $w_1, \cdots, w_{l-1}$ は ξ_i により表示される．$(W_l, S) \supset (W_{l-1}, S')$

$S' = \{s_1, \cdots, s_{l-1}\}$ とすれば，

(W_ℓ, S) の基本不変式は、$\mathbb{C}[w_1, \cdots, w_{\ell-1}, t]$ の元であって鏡映 S_ℓ により不変なものとして特徴づけられる。

さらに、初めのいくつかの x_i を求めることにより、次の方法によって新しい x_j を定めうる。即ち、

$x_i = \varphi_i(w, t)$ とすれば、

$$\nabla_{(\xi,t)} x_i \cdot \nabla_{(\xi,t)} x_j = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \nabla_\xi \varphi_i \cdot \nabla_\xi \varphi_j$$

ここで第2項は $\nabla_\xi w_k \cdot \nabla_\xi w_{k'}$ を用いて、w と t の式に書きあらわしうる。第一項はただちに $\mathbb{C}[w,t]$ の元である。

しかるに、左辺は不変式であることを知っている。よって右辺を、すでに知られている不変式 x_i を用いて、表示できるかぎり表示した残りは、新しい不変式と以前のものとの多項式であり、特に、その weight の基本不変式の存在がわかっている場合には、その表示を得ることとなる。

この構成には、m_{ij} の weight に十分注意する必要がある。

表 3　m_{ij} の weight の配列.

E_6

2	5	6	8	9	12
5	8	9	11	12	15
6	9	10	12	13	16
8	11	12	14	15	18
9	12	13	15	16	19
12	15	16	18	19	22

E_7

2	6	8	10	12	14	18
6	10	12	14	16	18	22
8	12	14	16	18	20	24
10	14	16	18	20	22	26
12	16	18	20	22	24	28
14	18	20	22	24	26	30
18	22	24	26	28	30	34

E_8							
2	8	12	14	18	20	24	30
8	14	18	20	24	26	30	36
12	18	22	24	28	30	34	40
14	20	24	26	30	32	36	42
18	24	28	30	34	36	40	46
20	26	30	32	36	38	42	48
24	30	34	36	40	42	46	52
30	36	40	42	46	48	52	58

上記の方法は，H_4の不変式を求める際に，H_3の不変式係数の多項式として表示した方針に基づくものである．

§3. E_6, E_7, E_8

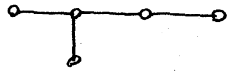
§2の方針に従い，不変式の決定を具体的に示す．詳細はすべて〔3〕にゆずる．

E_7において必要となるD_6のm_{ij}の表は次の通りである．

D_6 : $\frac{1}{2}M(D_6)$ 対称な部分は省略．

x_2					
$2x_4$	$3x_6+x_2x_4$				
$3x_6$	$4x_8+2x_2x_6$	$5x_{10}+3x_2x_8+x_4x_6$			
$3x_6'$	$\frac{5}{2}x_2x_6'$	$2x_4x_6'$	$\frac{1}{4}x_{10}$		
$4x_8$	$5x_{10}+3x_2x_8$	$6x_6'^2+4x_2x_{10}+2x_4x_8$	$\frac{3}{2}x_6x_6'$	$5x_2x_6'^2+3x_4x_{10}+x_6x_8$	
$5x_{10}$	$6x_6'^2+4x_2x_{10}$	$5x_2x_6'^2+3x_4x_{10}$	x_8x_6'	$4x_4x_6'^2+2x_6x_{10}$	$3x_6x_6'^2+$[illegible]x_8x_{10}

E_6 : 基本不変式を $w_2, w_5, w_6, w_8, w_9, w_{12}$ とする.

subdiagram •  D_5 を採用し,

その不変式を $\sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_8$ とする. $(\sigma_5 = \xi_1 \cdots \xi_5)$

即ち, $V_6 = \mathbb{C}^6$ の orthonormal basis $e_1, e_2, \cdots, e_5$, $e_6' = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_8 - e_7 - e_6)$

をとり, V の元を $\sum_{i=1}^{5} \xi_i e_i + p e_6'$ の形に表示する.

D_5 は $\sum \xi_i e_i$ に作用している。このとき,

$$w_2 = p^2 + \sigma_2$$

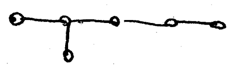
$$w_5 = \frac{1}{24}p^5 - \frac{1}{12}\sigma_2 p^3 + \left(-\frac{1}{8}\sigma_2^2 + \frac{1}{2}\sigma_4\right)p - \sqrt{3}\sigma_5$$

$$w_6 = \frac{1}{6}p^6 - \sigma_2 p^4 + \left(\frac{3}{2}\sigma_2^2 - 5\sigma_4\right)p^2 - 20\sqrt{3}\sigma_5 p + (-\sigma_2\sigma_4 + 6\sigma_6)$$

等表示される。

この方法を E_7, E_8 に対して適用する.

E_7 : 基本不変式 $y_2, y_6, y_8, y_{10}, y_{12}, y_{14}$

subdiagram •  D_6 の基本不変式

$x_2, x_4, x_6, x_6', x_8, x_{10}$. ($\xi_1, \cdots, \xi_6$ による表示)

$$V_7 = \mathbb{C}^7 = \sum_{i=1}^{6} \xi_i e_i + t e_7' \qquad e_7' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 - e_7)$$

E_8 : $z_2, z_8, z_{12}, z_{14}, z_{18}, z_{20}, z_{24}, z_{30}$

subdiagram には E_7 又は D_7 がとれる。どちらについてもためしてみるのが望ましい.

E_7 の不変式　$(\tau = t^2)$　$y_2, y_6, y_8, y_{10}, y_{12}, y_{14}, y_{18}$

$x_2, x_4, x_6, x_6', x_8, x_{10}$ は D_6 の基本不変式

$$
\left\{
\begin{aligned}
y_2 &= \tau + x_2 \\
y_6 &= \frac{1}{4}\tau^3 - \frac{1}{4}x_2\tau^2 + \left(-\frac{11}{4}x_2^2 + 10x_4\right)\tau + (x_2x_4 - 6x_6 - 60x_6') \\
y_8 &= \frac{1}{16}\tau^4 - \frac{1}{4}x_2\tau^3 + \left(\frac{5}{8}x_2^2 - x_4\right)\tau^2 + \left(\frac{3}{8}x_2^3 - \frac{5}{2}x_2x_4 + 9x_6 - 78x_6'\right)\tau \\
&\quad + (x_4^2 - 3x_2x_6 + 6x_2x_6' + 12x_8) \\
y_{10} &= \left(\frac{1}{8}x_2^3 - \frac{1}{2}x_2x_4 + x_6 + 2x_6'\right)\tau^2 + \left(\frac{1}{32}x_2^4 - \frac{1}{4}x_2^2x_4 - 2x_2x_6'\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}x_4^2 - 2x_8\right)\tau + (-x_2^2x_6' + 4x_4x_6' + 4x_{10}) \\
y_{12}\big|_{\tau=0} &= \frac{2}{9}x_4^3 - x_2x_4x_6 + 2x_2x_4x_6' + 3x_6^2 - 36x_6x_6' - 84x_6'^2 \\
&\quad + 3x_2^2x_8 - 8x_4x_8 - 12x_2x_{10} \\
y_{14}\big|_{\tau=0} &= -\frac{1}{2}x_2^2x_4x_6' + 2x_4^2x_6' + 24x_2x_6'^2 + 24x_6'x_8 - \frac{3}{2}x_2^2x_{10} + 8x_4x_{10} \\
y_{18}\big|_{\tau=0} &= -\frac{1}{2}x_2^3x_6'^2 + 2x_2x_4x_6'^2 + 12x_6x_6'^2 + 24x_6'^3 - x_2^2x_6'x_8 + 4x_4x_6'x_8 \\
&\quad + \frac{1}{32}x_2^4x_{10} - \frac{1}{4}x_2^2x_4x_{10} + \frac{1}{2}x_4^2x_{10} + 6x_2x_6'x_{10} + 2x_8x_{10}
\end{aligned}
\right.
$$

この決定には，HITAC 8400 ならびに手動計算を併用した。y_{12}, y_{14}, y_{18} の τ をこめた完全な式については [ ] 参照．　$m_{ij}'(y) = \frac{1}{4}\nabla y_i \cdot \nabla y_j$ の一部を記すと，

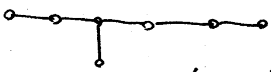
$m_{6,6} = y_2^2y_6 + 5y_2y_8 + 270y_{10}$,　$m_{6,8} = 2y_2^2y_8 - 3y_2y_{10} + 18y_{12}$

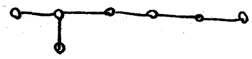
$m_{8,8} = 9y_2y_{12} + 2y_6y_8 + 84y_{14}$,　$m_{6,10} = \frac{5}{2}y_2^2y_{10} - 14y_{14}$

$m_{8,10} = -\frac{3}{2}y_6y_{10} - y_2y_{14}$,　$m_{10,10} = 8y_{18}$

$m_{6,12} = -24y_6y_{10} + \frac{4}{3}y_8^2 + 46y_2y_{14} + 3y_2^2y_{12}$

E_8: $V_8 = \mathbb{C}^8$ の正規直交基として, subdiagram の D_7 or E_7 にあわせた, 2つのとり方が可能である。

・ E_7 に注目する場合は $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5,$ e_6 と $e_7' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 - e_7)$, $e_8' = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_8 + e_7)$ をとり, $V \ni \sum_{i=1}^{6} \xi_i e_i + t e_7' + u e_8'$ とする. そして, (ξ, t) で表示された, E_7 の不変式を y_i とする.

・ D_7 の場合は, $V \ni \sum_{i=1}^{7} \xi_i e_i + r e_8$ とし, $\mathbb{C}\{\xi_1, \dots, \xi_7\}$ で表示された D_7 の基本不変式を s_2, s_4, s_6, s_7 s_8, s_{10}, s_{12} とする.

$$Z_2 = u^2 + y_2 = r^2 + s_2$$

$$Z_8 = s_2 r^6 + (12 s_2^2 - 35 s_4) r^4 + (s_2^3 - 14 s_2 s_4 + 84 s_6) r^2$$
$$+ 1680\, s_4 s_7 r + (s_2^2 s_4 + 10 s_4^2 - 36 s_2 s_4 + 120 s_8)$$

$$Z_8|_{u=0} = y_2 y_6 + 10 y_8$$

$$Z_{12} = \left(\frac{13}{30} s_2^2 - s_4\right) r^8 + \left(\frac{59}{45} s_2^3 - \frac{16}{3} s_2 s_4 + 9 s_6\right) r^6 - 84 s_7 r^5$$
$$+ \left(\frac{13}{30} s_2^4 - \frac{47}{15} s_2^2 s_4 + \frac{41}{6} s_4^2 - \frac{11}{5} s_2 s_6 - 6 s_8\right) r^4 + 1104\, s_2 s_7 r^3$$
$$+ \left(-\frac{2}{15} s_2^3 s_4 - s_2 s_4^2 + \frac{19}{5} s_2^2 s_6 - 12 s_2 s_8 + 176 s_{10}\right) r^2 +$$
$$+ \left(-7 s_2^2 + \frac{88}{3} s_4\right) s_7 r + \left(\frac{13}{30} s_2^2 s_4^2 + \frac{4}{9} s_4^3 - s_2^3 s_6 \quad \frac{16}{5} s_2 s_4 s_6\right.$$
$$\left. + \frac{48}{5} s_6^2 + 10 s_2^2 s_8 - 16 s_4 s_8 - 16 s_2 s_{10} + 192 s_{12}\right)$$

$$Z_{12}|_{u=0} = \frac{1}{10} y_6^2 + \frac{1}{3} y_2^2 y_8 + 2 y_2 y_{10} + 2 y_{12}$$

$$Z_{14}|_{u=0} = \frac{1}{2} y_2^3 y_8 + \frac{28}{5} y_6 y_8 + 3 y_2^2 y_{10} + 12 y_2 y_{12} + 84 y_{14}$$

他はまだ check されていない．$Dz_i \cdot Dz_j$ の例として，

$$\frac{1}{4} Dz_8 \cdot Dz_8 = z_2^3 z_8 + 30 z_2 z_{12} + 50 z_{14}.$$

[1] T. Yano - J. Sekiguchi., On the microlocal structure of weighted homogeneous polynomials associated to Coxeter groups 1

[2] 〃 - 〃 ; 〃 2

[3] 〃 - 〃 ; 〃 3.

[4] J. S. Frame : The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents 83-119

付記　第一著者は，同時間帯に "Gauss Manin Connection の ある filtration と，不変量 $L(f)$ について" と題する講演を行った。それは，斎藤恭司氏の一般論における，ある filtration が isolated singularity にかかわる connection の場合は，$\dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}:f$ ($L(f)=2$の時) あるいは b 函数論における色々な不変量によって記述されるというものであった．当講究録の斎藤氏の原稿も，一般論の記してあるので，私の方も次の機会にしるさせていただく．