数理解析研究所講究録
324巻 1978年 17-28

確定特異点を持つ常微分方程式系の mixed pole filtration と exponents

東大理 斎藤 恭司

§0. はじめに

本稿に述べる方法結果は、元来、超曲面 $\{f(x)=0\}$ の孤立特異点に対し、exponent と呼ばれる量を定義し、それ等と、f の b-函数 $b_f(s)=0$ の根との関係を明らかにする為に開発されたものである。従って、一見抽象的に見える諸概念や操作も、その幾何学的背景を持っている。

しかし一方、議論それ自体は、確定特異点を持つ常微分方程式系の局所理論としても、独立した内容を持っているので、その部分を切り離して、ここに結果を報告する事にした。超曲面の特異点の理論との結びつきについてや、証明は、現在準備中の論文「周期積分論」にのせる予定なので、割愛したい。

又、本稿を書くにあたって、P. Deligne [1], B. Malgrange [2] 等の仕事の影響を受けた。ここに参考文献として引用し謝したい。

§1.

$\mathcal{O} := \mathbb{C}\{t\}$ = 複素係数一変数 t の収束巾級数環

K：$=\mathcal{O}$の商体 $=$ 一変数の主要部が有限個のLaurant級数体

H：K上 μ(有限)次元のベクトル空間.

$\mathcal{H}$がHのlatticeであるとは

i) $\mathcal{H}$はHの$\mathcal{O}$-sub-moduleで有限生成

かつ ii) $\mathcal{H}\cdot K = H$

となるものの事。$\mathcal{O}$が単項イデアル環であるから、任意のlatticeは自動的に、$\mathcal{O}$-moduleとしてfree of rank μとなる。従って、$\mathcal{H}/t\mathcal{H}$は$\mathbb{C}\simeq\mathcal{O}/t\mathcal{O}$上$\mu$次元のベクトル空間になる。

DがH上のconnection(接続)であるとは

i) $D : H \longrightarrow H$ $\quad\mathbb{C}$-linear map

ii) $D(\omega\cdot f) = (D\omega)f + \omega\dfrac{df}{dt} \qquad$ for $\omega\in H$, $f\in K$

なるものを言う。

$\omega_1,\cdots,\omega_\mu$が$H$の或るK-baseとする時

$$D\omega_i = \sum_{j=1}^{\mu}\omega_j\cdot a_i^j \qquad a_i^j\in K \qquad i=1,\cdots,\mu$$ とする時

$\omega=\sum_{i=1}\omega_i f^i$ に対し $\quad D\omega=\sum_{i=1}^{\mu}\omega_i\left(\dfrac{df^i}{dt}+\sum_{j=1}^{\mu}a_j^i f^j\right)$ となり、

従って、connection Dを与えるという事は、1階常微分方程式系

$$\text{①} \qquad \frac{df^i}{dt}+\sum_{j=1}^{\mu}a_j^i f^j = 0 \qquad i=1,\cdots,\mu$$

を与える事に外ならない。ここで、行列 $A(t)=\{a_j^i(t)\}_{i,j=1,\cdots,\mu}$ を基底$\omega_1,\cdots,\omega_\mu$に関する$D$の接続行列と呼ぶ。

$\mathbb{C}-\{0\}$ の 0 の近傍で正則多価な函数のgermの全体を$\tilde{K}$と書く

$K\subset\tilde{K}$ とみなす。この時 ① の dual な方程式を解く事により次の様な対応 G を構成できる。

② $G: H \longrightarrow \bigoplus^{\mu}\tilde{K}$ （μ個の $\tilde{K}$ の函数による縦ベクトルの全体）

s.t. i) G は K-linear (i.e. $G(\omega f) = G(\omega) f$ for $\omega\in H, f\in K$)

ii) $\frac{d}{dt}\left(G(\omega)\right) = G(D\omega)$ for $\omega\in H$

iii) $\omega_1,\dots,\omega_\mu$ を H の(任意の) K-base とする時 matrix $\left(G(\omega_1),\dots,G(\omega_\mu)\right)$ は($\tilde{K}$-係数内で)可逆であって逆行列 $\left(G(\omega_1),\dots,G(\omega_\mu)\right)^{-1}$ は方程式系 ① の解の基本系をなす。

従って iv) 或る $M\in GL(\mu,\mathbb{C})$ があって $G(\omega)(te^{2\pi i}) = M\,G(\omega)(t)$ for $\omega\in H$.

この M の事をモノドロミー行列と言う。

（この i)〜iv) を満す様な G は左から $GL(\mu,\mathbb{C})$ の元を乗ずる任意性を除いて unique に決る。）

今少し、用語を定義する。

定義 $m_1,\dots,m_\mu$ を整数で $0\le m_1\le m_2\le\dots\le m_\mu$ とする。K の元を係数とする行列 $A=(a^i_j(t))_{i,j=1,\dots,\mu}$ が $(m_1,\dots,m_\mu)$ 型の極を持つとは、$a^i_j(t)\in t^{m_j-m_i}\mathcal{O}$ となる事である。$\sum_{i=1}^{\mu} m_i$ を型 $(m_1,\dots,m_\mu)$ の degree と呼ぶ。$(m_1,\dots,m_\mu)$ 型の行列 $A=(a^i_j)$ に対し、($(m_1,\dots,m_\mu)$型の)初項とは定数行列 $A_0=(b^i_j)$ でその係数は $b^i_j = t^{m_i-m_j}a^i_j(t)\big|_{t=0}$ の事とする。

或る行列 $C=(c^i_j)_{i,j=1,\dots,\mu}$ が type $(m_1,\dots,m_\mu)$ の(真)上三角行列

であるとは，$m_i-m_j>0\ (\geq 0)$ する ij に対し $C^i_j=0$ となる事。

以上の準備の下にまず，次の事が成り立つ。

<u>定理</u>　H 上の接続 D，及び或る lattice $\mathcal{H}\subset H$ が与えられているとする。この時

I．i) D が確定特異点を持つ（その定義は微分方程式①が確定特異点を持つという事）必要充分条件は，或る整数 $m_1,\cdots,m_\mu$ $(0\leq m_1\leq\cdots\leq m_\mu)$ 及び，$\mathcal{H}$ の $\mathcal{O}$-free base $\omega_1,\cdots,\omega_\mu$ が存在して，次の事が成り立つ事である。base $\omega_1,\cdots,\omega_\mu$ に関する，D の接続行列を $\frac{1}{t}A(t)$ とおくと，$A(t)$ は $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型の極を持つ行列となる。

ii) その時，行列 $\left(G(\omega_1)(t),\cdots,G(\omega_\mu)(t)\right)=G(t)$ に対し，

$G^{-1}(t)\ G(te^{2\pi i})$ は K の元を係数とする行列であるが，更に，それは $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型の極を持ち，その初項行列 $=$

$\cdots=\exp\left(2\pi i\left(A_0-\begin{pmatrix}m_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & m_\mu\end{pmatrix}\right)\right)$ となる。

II．上記 I の情況において，型 $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 及び初項行列 A_0 は，次の意味で unique となる。すなわち，I における表示において型 $(m_1,\cdots,m_\mu)$ の degree $=m_1+\cdots+m_\mu$ のとりうる最少値を考える。すると，この最少値を与える型 $(m_1,\cdots,m_\mu)$ は唯一つしか存在せず，更にその時対応して定まる，接続行列の初項を A_0 とすると，$A_0-\begin{pmatrix}m_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & m_\mu\end{pmatrix}$ の $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型の上三角型行列群による共約類は unique に決る。

<u>系</u> $\left\{②\text{ の iv) におけるモノドロミー行列 }M\text{ の固有値}\right\}=\exp\left(2\pi i\left\{\right.\right.$

$A_0 - M$ の固有値?

系. $\omega_1, \cdots, \omega_\mu$ を $\mathcal{H}$ の任意の $\mathcal{O}$-free base とする。すると. D の base $\omega_1, \cdots, \omega_\mu$ に関する接続行列の trace は K の元として. simple pole を持つ。その residue は base $\omega_1, \cdots, \omega_\mu$ のとり方によらない。それを $tr.(D, \mathcal{H}) \in \mathbb{C}$ と書く事にする。次の公式が成り立つ。イ) $\det(G(\omega_1), \cdots, G(\omega_\mu)) = t^{tr(D,\mathcal{H})} \cdot unit$

ロ) $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ が H の 2つの lattices であって. $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}'$ とする。

$$tr(D, \mathcal{H}) - tr(D, \mathcal{H}') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}'/\mathcal{H} .$$

§2

D を H 上定義された接続とする。更に次の data が与えられているとする。

$\mathcal{H}^{(0)}, \mathcal{H}^{(1)}$, : H の 2つの lattices , Ω : $\mathcal{O}$-torsion module

s.t. i) $\mathcal{H}^{(1)} \subset \mathcal{H}^{(0)}$ かつ 次を $\mathcal{O}$-exact sequence にする $\nu^{(0)}$ が存在.

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)} \xrightarrow{\nu^{(0)}} \Omega \longrightarrow 0$$

ii) $D|_{\mathcal{H}^{(1)}}$ を $D^{(0)}$ と書くと

$$D^{(0)} : \mathcal{H}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{H}^{(0)} \quad \text{は bijection を与える。}$$

以上の情況の時、Malgrange の index theorem を使えば 簡単に.

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega = \dim_K H = \operatorname{rank}_{\mathcal{O}} \mathcal{H}^{(0)} = \operatorname{rank}_{\mathcal{O}} \mathcal{H}^{(1)} = \mu$$

さてこの時 $\mathcal{H}^{(0)}, \mathcal{H}^{(1)}$ に続いて $\mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(3)}, \cdots, \cdots$ なるものをしかるべく作りたい。次の命題が. それを保証する。

命題　H, D, $\mathcal{H}^{(0)}, \mathcal{H}^{(-1)}, \nu^{(0)}$ 等々は上記の通りとする。

この時 $\forall k\in\mathbb{Z}$ に対し、

$A^{(k)}$: Ωの $\mathcal{O}$-submodule，kについての増大列で、$A^{(0)}=0$.

$\mathcal{H}^{(k)}$: Hの latticeの増大列，k=0,1の時は所与のものと一致

$\nu^{(k)}$: $\mathcal{O}$-homomorphism　$\mathcal{H}^{(k)}\to\Omega/A^{(k)}$　(k=0の時は $=\nu^{(0)}$)

なるもので、以下の条件を満すものが unique に存在する。

i) $0\to\mathcal{H}^{(k-1)}\hookrightarrow\mathcal{H}^{(k)}\xrightarrow{\nu^{(k)}}\Omega/A^{(k)}\to 0$　は $\mathcal{O}$-exact.

ii) 制限 $D|_{\mathcal{H}^{(k-1)}}$ を $D^{(k)}$と書く時

$D^{(k)}:\mathcal{H}^{(k-1)}\longrightarrow\mathcal{H}^{(k)}$　は surjective

iii) 次の図式は可換.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^{(k-1)} \arrow[r] \arrow[d, "D^{(k)}"] & \mathcal{H}^{(k)} \arrow[r, "\nu^{(k)}"] \arrow[d, "D^{(k+1)}"] & \Omega/A^{(k)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^{(k)} \arrow[r] & \mathcal{H}^{(k+1)} \arrow[r, "\nu^{(k+1)}"] & \Omega/A^{(k+1)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

従って、iv)

$$\dim_{\mathbb{C}} A^{(k)} = \dim_{\mathbb{C}} \ker D^{(k)}$$

この命題は最初 $(\mathcal{H}^{(0)}, \mathcal{H}^{(-1)}, D^{(0)}, \Omega)$ 等の data が与えられたら自動的に、$\forall k\in\mathbb{Z}$に対し $(\mathcal{H}^{(k)}, \mathcal{H}^{(k-1)}, D^{(k)}, \Omega/A^{(k)})$ 等の data が決る事を主張している。（幾何学的には、これはサイクルのサスペンションと対応すると考えられる。）

さてここで、新に Hの $\mathcal{O}$-sub-moduleの増大列 $\tilde{\mathcal{H}}^{(i)}, i\in\mathbb{Z}$ を定義する。

$$\tilde{\mathcal{H}}^{(i)} \underset{\text{definition}}{\equiv} \sum_{l=0}^{\infty} t^{l}\,\mathcal{H}^{(i+l)}$$

定義より明らかに.

$D|_{\tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)}} : \tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}^{(j)}$ は surjective homomorphism

t倍: $\tilde{\mathcal{H}}^{(j)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)}$ は injective homomorphism

以上の用語の下に、

命題 以下の諸条件は同値

i) $\mathfrak{D}$ は確定特異点を持つ。

ii) $\tilde{\mathcal{H}}^{(j)}$ は H の lattice となる。 $j \in \mathbb{Z}$

iii) $\mathcal{H}^{(0)}$ の $\mathcal{O}$-module としての t-adique 位相は. $\mathcal{H}^{(0)} \supset \mathcal{H}^{(-1)} \supset \mathcal{H}^{(-2)} \supset \cdots$

を 0 の基本近傍系とする位相とは一致する。

Definition

この時. $j \in \mathbb{Z}$ に対し. 次の条件は同値となり、その時は. j は stable range (安定域) に属するという事にする。

i) $t\,\tilde{\mathcal{H}}^{(j)} = \tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)}$

ii) $D|_{\tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)}} : \tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)} \longrightarrow \tilde{\mathcal{H}}^{(j)}$ は injective

iii) $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{\mathcal{H}}^{(j)} / \tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)} = \mu$

もし j が stable ならば $j' \leq j$ なる j' も stable となる。stable range が空集合でない事も示せる。 もし. $\lim_{t \to 0} G(\omega)(t) = 0$ for ${}^{\forall} t \in \mathcal{H}^{(j-1)}$ なる時. j は stable になる. (充分条件). j が stable なる $A^{(j)} = 0$ となる。

さて. j が stable な時、Ω の sub-module の減少列 を次の様に定義する。

$$W_\ell \underset{\text{definition}}{:=} r^{(j)}\left(t^\ell \tilde{\mathcal{H}}^{(j)} \cap \mathcal{H}^{(j)} \right) \;\; \left(= r^{(j)}\left(\tilde{\mathcal{H}}^{(j-\ell)} \cap \mathcal{H}^{(j)} \right)\right) \qquad \ell = 0, 1, 2, \cdots$$

$\Omega = W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \cdots$

<u>命題</u> i) W_ℓ, $\ell=0,1,2\cdots$ は $j\in$ stable range $\subset\mathbb{Z}$ によらない。
従って、或る Ω の filtration $\Omega=W_0(\Omega)\supset W_1(\Omega)\supset\cdots\supset \underset{N\gg 0}{W_N(\Omega)}=0$
が、一つ cannonical に定まる。

ii) $tW_\ell\subset W_{\ell+1}$

さて、ここで一言、1般に lattice $\mathcal{H}$ に対し $\mathcal{H}/t\mathcal{H}$ を $|\mathcal{H}|$ と書く事にして（それは μ 次元 $\mathbb{C}$-ベクトル空間となる）この residual space に対しても、次の filtration を考えよう。

$$F_\ell(|\mathcal{H}|)=t^\ell\tilde{\mathcal{H}}\cap\mathcal{H}\quad\text{modulo } t\mathcal{H}.\quad \ell=0,1,2,\cdots$$

説明を略するが、この $|\mathcal{H}|$ に定まった filtration $F_0\supset F_1\supset\cdots$ は、実は §1 の定理の II で一意的に存在した型 $(m_1,\cdots,m_\mu)$ から構成される、ある filtration と同一物になっている。

<u>定理</u> $\dim_{\mathbb{C}} W_\ell(\Omega)=\dim_{\mathbb{C}} F_\ell(|\mathcal{H}^{(j)}|)$ for ${}^\forall\ell=0,1,2\cdots$, ${}^\forall j\in$ stable range

<u>系</u> j を stable とする。この時、以下の性質を持つ様な、$\mathbb{C}$-線形写像 $v:\Omega\longrightarrow\mathcal{H}^{(j)}$ が存在する。

i) v は、次の exact sequence を split する。(i.e. $P^{(j)}\circ v=id_\Omega$)

$$0\longrightarrow\mathcal{H}^{(j-1)}\longrightarrow\mathcal{H}^{(j)}\xrightarrow{P^{(j)}}\Omega\longrightarrow 0$$

ii) $v(W^\ell)\subset\tilde{\mathcal{H}}^{(j-\ell)}$

iii) 写像の合成 $V:\Omega\xrightarrow{v}\mathcal{H}^{(j)}\longrightarrow|\mathcal{H}^{(j)}|$ は、2つの μ 次元 vector 空間 Ω と $|\mathcal{H}^{(j)}|$ の同型を与える。

定義 i) 上記の系で存在を保証された v を section と呼ぶ。

ii) v に associate された section w とは、以下の様に定義された $\mathbb{C}$-linear map $w : \Omega \to \mathcal{H}^{(g-1)}$ の事である。

$$w(e) \underset{def}{=} t\,v(e) - v(te) \quad \text{for} \quad e \in \Omega .$$

命題 associate section w と residue とを合成して

$$W : \Omega \xrightarrow{w} \mathcal{H}^{(g-1)} \to |\mathcal{H}^{(g-1)}|$$

とおく。すると W はベクトル空間の同型を与え、更に

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "t"] \arrow[d, "W"] & \Omega \arrow[d, "V"] \\ {|\mathcal{H}^{(g-1)}|} \arrow[r] & {|\mathcal{H}^{(g)}|} \end{tikzcd}$$

は可換となる。更に上記の V, W はそれぞれ filtered space の同型を与えている。i.e.

$$V : W_\ell(\Omega) \simeq F_\ell(|\mathcal{H}^{(g)}|)$$
$$W : W_\ell(\Omega) \simeq F_\ell(|\mathcal{H}^{(g-1)}|)$$

(この事は filtered space の無限系列 $|\mathcal{H}^{(g)}|$ とその間の写像は、適当な同一視 V, W によって、Ω 上の filtration W_ℓ と、t の multiplication に変換される事を示している。)

定義 section v に対して、Ω の endmorphism N_v を次の様な写像の合成として定義する。

$$N_v : \Omega \xrightarrow{w} \mathcal{H}^{(g-1)} \xrightarrow{D} \mathcal{H}^{(g)} \xrightarrow{r^{(g)}} \Omega$$

明らかに、N_v は Ω の filtration W_* を preserv する。

ここで Ω の $\mathbb{C}$-base $e_1, \cdots, e_\mu$ を次の様にとる。
$e_i \in W_m$ なる最大の m を m_i と書く時

i) $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_\mu$

ii) $\{e_i : m_i < m\}$ は $\Omega/W_m(\Omega)$ の base とする。(1次独立)

この時、section v に対し、次の事が分る。

$v(e_1), \cdots, v(e_\mu)$ は $\mathcal{H}^{(j)}$ の $\mathcal{O}$-free base

$\frac{1}{t^{m_1}}v(e_1), \cdots, \frac{1}{t^{m_\mu}}v(e_\mu)$ は $\tilde{\mathcal{H}}^{(j)}$ の $\mathcal{O}$-free base

$w(e_1), \cdots, w(e_\mu)$ は $\mathcal{H}^{(j-1)}$ の $\mathcal{O}$-free base

$\frac{1}{t^{m_1}}w(e_1), \cdots, \frac{1}{t^{m_\mu}}w(e_\mu)$ は $\tilde{\mathcal{H}}^{(j-1)}$ の $\mathcal{O}$-free base

1方、この base $(e_1, \cdots e_\mu)$ について、Ω上 t倍 する作用を行列表示して A と書けば、

$$(w(e_1), \cdots, w(e_\mu)) = (v(e_1), \cdots, v(e_\mu))\,(tI - A)$$

ここで、A は nilpotent な行列でかつ、$I - \frac{1}{t}A$ は $(m_1, \cdots$
$\cdots m_\mu)$ 型の pole を持つ行列になる事に注意しよう。($\because$ $tW_\ell \subset W_{\ell+1}$)

さて材料はそろった。残るは D をどう記述するかだが、§1で見た様に D の connection matrix を決めれば、D が決るのだから、ここではそれを幾分修正して、base $v(e_i)$ と $w(e_i)$ を使って、D を表示しよう。

$$\mathcal{D}w(e_j) = \sum_{i=1}^{\mu} v(e_i)\, L_j^i(t) \qquad j=1,\cdots,\mu$$

とおけ。 $L=\{L_j^i(t)\}_{i,j=1,\cdots,\mu}$ は $\mathcal{O}$-係数行列とする。

しかるに $w(e_k) \in \tilde{\mathcal{H}}^{(j-1-m_k)} \cap \mathcal{H}^{(j-1)}$

従って $\mathcal{D}w(e_k) \in \tilde{\mathcal{H}}^{(j-m_k)} \cap \mathcal{H}^{(j)}$

故に $t^{m_j-m_i} \mid L_j^i(t)$ (for $m_j \geq m_i$)

よって、§1の定義によると、L は $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型行列となる。

そこで、base $w(e_1),\cdots,w(e_\mu)$ に関する接続行列は、

$$\mathcal{D}(w(e_1),\cdots,w(e_\mu)) = (v(e_1),\cdots,v(e_\mu))\,L = (w(e_1),\cdots,w(e_\mu))(tI-A)^{-1}L$$

により求まって、$(tI-A)^{-1}L(t) = \frac{1}{t}\left(I-\frac{1}{t}A\right)^{-1}L(t)$ となる。

$L(t)$, $I-\frac{1}{t}A$ が $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型行列だったので、その積も $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型となり、従って、ここに求まった接続行列 $\frac{1}{t}\left(I-\frac{1}{t}A\right)^{-1}L(t)$ は、§1の定理 II で述べた標準型になっている。特に初項 $=(I-A)^{-1}L_0$ となる。ただし、$L_0=\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ は $L(t)$ の初項行列で $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型の上三角行列となっている。

従って $\exp 2\pi i\left((I-A)^{-1}L_0 - \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_\mu \end{pmatrix}\right)$ はモノドロミー行列の conjugate class の極限となり、

並 $\{$モノドロミー行列の固有値$\} = \exp 2\pi i \left\{ (I-A)^{-1}L_0 - \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_\mu \end{pmatrix} \text{の固有値} \right\}$

一方、$N_v = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint (tI-A)^{-1}L(t)\,dt$ なる関係から、

N_v の $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型対角成分 $=$ $(I-A)^{-1}L_0$ の $(m_1,\cdots,m_\mu)$ 型対角成分。

一般に L_0 は上三角行列であるとしか言えないが、更にもし

$L_0 = (m_1, \cdots m_\mu)$ 型対角行列（i.e. $m_i = m_j$ なる (i,j) 以外の成分 $=0$）

とすると

$$N_v = L_0 + (m_1, \cdots, m_\mu)\text{型 真下三角行列}$$

$$(I-A)^{-1} L_0 = L_0 + (m_1, \cdots, m_\mu)\text{型 真下三角行列}$$

となり $\{L_0\text{の固有値}\} = \{N_v\text{の固有値}\}$

$= \{(I-A)^{-1}L_0 - \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & m_\mu \end{pmatrix}$ の固有値に、整数 $m_1, \cdots, m_\mu$ を加えたもの$\}$

従って $\{$monodromy M の固有値$\} = \exp 2\pi i \{N_v\text{の固有値}\}$

$= \exp 2\pi i \{L_0\text{の固有値}\}$

なる関係を得る。

しかし、この辺は、上の様に好都合な section が存在するのかを含めて、未だ delicate な問題がいろいろ残っているので、ひとまずここで筆をおく。

[1] P. Deligne - Equations différentielles à points singuliérs réguliers Lecture notes in Mathematics no163 Springer (1970)

[2] B. Malgrange - Integrales asymptotiques et monodromie