数理解析研究所講究録
325巻 1978年 218-222

On 2p-fold transitive permutation groups

学習院大 理 芳沢光雄

Gを$\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$上の$2p$-重可移群とし(p: odd prime)、Pを$G_{1,2,\cdots,2p}$のSylow p-subgroupとする。Gがnontrivial (S_nやA_nでない)な$2p$-重可移群ならば、$P\neq 1$、かつ$P^{\Omega-I(P)}$がnonsemiregularであることが、坂内英一氏により証明されている。そこで、$|I(P)|$点より多くfixしているPのsubgroupsのうちで、orderが最大となるものQをとる。$N_G(Q)^{I(Q)}$がどのようになるかを考え、次のTheorem A, Theorem Bを得た。

<u>Theorem A</u> Let p be an odd prime. Let G be a permutation group on a set $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$ which satisfies the following condition. For any $2p$ points $\alpha_1,\cdots,\alpha_{2p}$ of Ω, a Sylow p-subgroup P of the stabilizer in G of the $2p$ points $\alpha_1,\cdots,\alpha_{2p}$ is nontrivial and fixes exactly $2p+r$ points of Ω, and moreover P is

semiregular on the set $\Omega - I(P)$ of the remaining $n-2p-r$ points, where r is independent of the choice of $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2p}$ and $0 \leqslant r \leqslant p-2$. Then $n = 3p+r$, and there exists an orbit Γ of G such that $|\Gamma| \geqslant 3p$ and $G^{\Gamma} \geqslant A^{\Gamma}$.

<u>Theorem B</u> Let p be an odd prime $\geqslant 11$. Let G be a permutation group on a set $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$ which satisfies the following condition. For any $2p$ points $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2p}$ of Ω, a Sylow p-subgroup P of the stabilizer in G of the $2p$-points $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2p}$ is nontrivial and fixes exactly $3p-1$ points of Ω, and moreover P is semiregular on the set $\Omega - I(P)$ of the remaining $n-3p+1$ points. Then $n = 4p-1$, and one of the following two cases holds: (1) There exists an orbit Γ of G such that $|\Gamma| \geqslant 3p$ and $G^{\Gamma} \geqslant A^{\Gamma}$. (2) G has just two orbits Γ_1 and Γ_2 with $|\Gamma_1| \geqslant p$, $|\Gamma_2| \geqslant p$ and $|\Gamma_1| + |\Gamma_2| = 4p-1$, and G^{Γ_i} is $(|\Gamma_i| - p+1)$-transitive on Γ_i $(i = 1, 2)$. Moreover, $G^{\Gamma_i} \geqslant A^{\Gamma_i}$ if $|\Gamma_i| \geqslant p+3$.

Theorem Bの証明の方が、Theorem Aの証明より多少複雑であるが、それらは、本質的には同じであるので、Theorem Aの証明の概略を次に述べます。

Theorem A の証明の概略　G を Theorem A の仮定をみたす群とすれば、G は長さが p 以上の唯一の orbit Γ をもつことが分かる。そのことから、$\Omega=\Gamma$ と仮定してよい。Theorem A の仮定を何回も使うことにより、G は Ω 上 $(p+3)$-transitive であることが分かる。以後 $G \neq A^{\Omega}$ を仮定して矛盾を導くことにする。$G_{1,2,3}$ は $\Omega-\{1,2,3\}$ 上 p-transitive であるので、次の式が得られる。

$$\frac{|G_{1,2,3}|}{p}=\sum_{x\in G_{1,2,3}}\alpha_p(x)\geqq\sum_i\frac{|G_{1,2,3}|}{|C_{G_{123}}(u_i)|}\frac{1}{p}\sum_y{}'\alpha^*(y).$$

上式において、$\alpha_p(x)$ は x の cycle structure における p-cycle の個数で、u_i は $G_{1,2,3}$ における order p の元の共役類の代表元全体を動き、y は $C_{G_{123}}(u_i)$ における全ての p'-elements を動き、$\alpha^*(y)$ は、y の $\Omega-I(u_i)$ 上の固定点数を表わすものとする。

a を $|I(a)|=2p+r$ となるような $G_{1,2,3}$ の order p の元とすれば、上式を使って、$C_{G_{123}}(a)$ は $\Omega-I(a)$ 上に高々3つの orbits をもち、さらに $|\Omega|-(2p+r)\not\equiv 0 \pmod{p^2}$ のときは、$C_{G_{123}}(a)$ は $\Omega-I(a)$ 上に高々2つの orbits をもつことが分かる。このことを使って、order p の元の fusion を色々と調べることにより、矛盾を得る。

Theorem A の corollary として、次の Theorem C, Theorem D を得た。Theorem C, Theorem D は、それぞれ Livingstone-Wagner, Wielandtの結果の改良になっている。

<u>Theorem C</u> Let p be an odd prime. Let G be a nontrivial $2p$-transitive group on $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$. Then there exists a subset Γ of Ω such that $|\Gamma| \geq 3p-1$ and $G^{\Gamma}_{(\Gamma)} \geq A^{\Gamma}$.

<u>Theorem D</u> Let G be a nontrivial t-transitive group on $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$. If t is sufficiently large, then $\log(n-t) > \frac{3}{4}t$.

Theorem AとTheorem Bを使うことによって、次のTheorem Eを得た。Theorem Eは、坂内英一氏の結果の改良になっている。

<u>Theorem E</u> Let p be an odd prime ≥ 11, and let q be an odd prime with $p<q<p+\frac{p}{3}$. Let G be a $2p$-fold transitive permutation group on $\Omega=\{1,2,\cdots,n\}$. If the order of $G_{1,2,\cdots,2p}$ is not divisible by q, then G is S_n $(2p\leq n\leq 2p+q-1)$ or A_n $(2p+2\leq n\leq 2p+q-1)$.

Theorem Eの証明の概略は、次のようなものである。(G:反例)
$|I(P)|\leq p+q-1$のときは、$3p$点より多くfixするPのsubgroupsの

うちで、order最大なものをQとし、$|I(P)| \geqq p+q$ のときは、4p点より多くfixするPのsubgroupsのうちで、order最大なものをQとする。$N_G(Q)^{I(Q)}$ にTheorem A, Theorem Bを使うことにより、$|I(P)| \geqq p+q$, かつ $N_G(Q)^{I(Q)}$ は3p点より多くfixするorder pの元をもつことが分かる。その元を使うことにより矛盾を得る。

Theorem E の corollary として、次の Theorem F, Theorem G を得た。

<u>Theorem F</u> Let p be an odd prime $\geqq 11$, and let q be an odd prime with $p < q < p + \frac{p}{3}$. Let G be a $2p$-fold transitive permutation group on $\Omega = \{1, 2, \cdots, n\}$. If $G_{1,2,\cdots,2p}$ has an orbit on $\Omega - \{1, 2, \cdots, 2p\}$ whose length is less than q, then G is S_n $(2p+1 \leqq n \leqq 2p+q-1)$ or A_n $(2p+2 \leqq n \leqq 2p+q-1)$.

<u>Theorem G</u> Let p be an odd prime $\geqq 11$, and let q be an odd prime with $p < q < p + \frac{p}{3}$. Let D be a $2p$-$(v, k, 1)$ design with $2p < k < 2p+q$. If an automorphism group G of D is $2p$-fold transitive on the set of points of D, then D is a $2p$-$(k, k, 1)$ design, namely a trivial design.