数理解析研究所講究録
325巻 1978年 196-200

Schur Index and Schur Group

都立大 理　　山田俊彦

筆者の講演では，Schur index ならびに Schur group に関して最近えられたいくつかの結果について，[1]，[3]，[4]，[7] を中心にして述べた。そこでは [5] において与えられた p進体上の円分多元環 (cyclotomic algebra) の index の公式が一つの中心的役割を演じている．[1]，[3]，[4] は既に印刷されているので，ここでは [7] で得られている結果を説明しよう．それは次の定理の精密化である．

<u>定理</u> 1 (Fein-Yamada [2])．G は有限群，χ は G の複素既約指標，$m = m_Q(\chi)$ は χ の有理数体 Q 上の Schur index，p は素数，そして m の p-part が $p^r > 1$ とする．そのとき p^{r+1} が G の exponent を割るか，p^r が G' (G の交換子群) の exponent を割る．さらに $p=2$ であるかまたは $p \neq 2$ で G の p-Sylow 群が abel ならば，p^{r+1} が G の exponent を割る．また p^{2r} は G の位数を割る．

さて ℓ を素数，Q_ℓ を ℓ 進体，k を Q_ℓ 上の円体，即ちある 1

の巾根ζ'が存在して$\mathbb{Q}_\ell \supset k \supset \mathbb{Q}_\ell$とする. k上の cyclotomic algebra とは次のような接合積のことである:

(1) $\quad B = (\beta,\ k(\zeta)/k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{g}} k(\zeta) u_\sigma, \quad (u_1 = 1),$

(2) $\quad u_\sigma x = \sigma(x) u_\sigma \quad (x \in k(\zeta)), \quad u_\sigma u_\tau = \beta(\sigma, \tau) u_{\sigma\tau}.$

ここでζは1の巾根, $\mathfrak{g}$は$k(\zeta)/k$の galois 群, βは因子団で, その値は$k(\zeta)$に含まれる1の巾根である. βは次のような積に書くことができる:

(3) $\quad \beta(\sigma, \tau) = \alpha(\sigma, \tau)\gamma(\sigma, \tau), \quad (\sigma, \tau \in \mathfrak{g}),$

$\alpha(\sigma,\tau)$はℓと素な位数の巾根, $\gamma(\sigma,\tau)$は1のℓ巾根.

さて$\ell \neq 2$としよう. $k(\zeta)/k$の inertia group を$\langle\theta\rangle$, ϕをFrobenius 置換とする. θの位数eは次のように書かれる: $e = \ell^t \cdot e'$, $e' \mid \ell - 1$. fを$k/\mathbb{Q}_\ell$の惰性次数とすると, 1の$\ell^f - 1$乗根ζ_{ℓ^f-1}はkにぞくする.

<u>定理</u> 2 (Yamada [5]). ℓを奇素数, kを$\mathbb{Q}_\ell$上の円体, $(\beta,\ k(\zeta)/k) \sim (\alpha,\ k(\zeta)/k) \otimes_k (\gamma,\ k(\zeta)/k)$を(1)−(3)で与えられる$k$上の円分多元環,

$$\delta = (\alpha(\theta, \phi)/\alpha(\phi, \theta))^{e/(\ell^f-1)}\ \alpha(\theta,\theta)\alpha(\theta^2,\theta)\cdots\alpha(\theta^{e-1},\theta)$$

とすると, $\delta = \zeta_{\ell^f-1}^{\nu}$ (νはある整数)と書ける. そして円分多元環$(\beta,\ k(\zeta)/k)$の index は$e'/(\nu, e')$に等しい.

<u>系</u> 3. 記法は定理2と同じとする. もし factor set βの

値がすべてlと素な位数の1の巾根で，かつ $e=e'$ とするならば，円分多元環 $(\beta, k(\zeta)/k)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{g}} k(\zeta)u_\sigma$ の位数は $[u_\theta, u_\phi] = u_\theta u_\phi u_\theta^{-1} u_\phi^{-1}$ の位数と $u_\theta^{l^f-1}$ の位数の最小公倍数を割り切る．

系3とBrauer-Wittの定理を用いると，l進体Q_l上のSchur indexに関する次の定理が得られる．

定理4．Gを有限群，χをGの既約指標，lを奇素数，pを素数，χのQ_l上のSchur index $m_{Q_l}(\chi)$のp-partが$p^n>1$とする．そのときp^{2n}はGのexponentを割るか，p^nはG'のexponentを割る．もしGのp-Sylow群がabelなら，p^{2n}がGのexponentを割る．p^{2n}がGのexponentを割らなければ，p^{2n+1}がGの位数を割る．

次に2進体Q_2の場合を考察してみよう．既約指標χに対して$m_{Q_2}(\chi)=1$ or 2であることはよく知られている．

定理5．Gを有限群，χをGの既約指標とする．もし$m_{Q_2}(\chi)=2$ならば2^2がGのexponentを割り，2がG'のexponentを割り，2^3がGの位数を割る．

注意．$\mathbb{R}$を実数体とする．Gが$m_{\mathbb{R}}(\chi)=2$なる既約指標χを持つ場合，必ずしも2はG'のexponentを割らないし，また2^3はGの位数を割るとは必ずしもいえない．その例は$G=\langle a, b\rangle$, $a^6=1$, $b^2=a^3$, $bab^{-1}=a^{-1}$により与えられる．

さて l 進体上の Schur index に関する上記の結果と，Fein-Yamada Theorem の一部分を用いて，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の Schur index に関する次の結果が得られる．

定理 6. G は有限群，χ は複素既約指標，$m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ の p-part は $p^n > 1$ とする．そのとき p^{2n} が G の exponent を割るか，p^n が G' の exponent を割る．G の p-Sylow 群が abel ならば，p^{2n} が G の exponent を割る．p^{2n} が G の exponent を割らなければ，p^{2n+1} が G の位数を割る．

References

[1] M. Benard, Schur indices and cyclic defect groups, Ann. of Math., 103 (1976), 283-304.

[2] B. Fein and T. Yamada, The Schur index and the order and exponent of a finite group, J. Algebra, 28 (1974), 496-498.

[3] G. J. Janusz, Generators for the Schur group of local and global number fields, Pacific J. of Math., 56 (1975), 525-546.

[4] G. J. Janusz, The Schur group of an algebraic number field, Ann. of Math., 103 (1976), 253-281.

[5] T. Yamada, Characterization of the simple compo-

nents of the group algebras over the p-adic number field, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971), 295-310.

[6] T. Yamada, The Schur Subgroup of the Brauer Group, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 397, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[7] T. Yamada, More on the Schur index and the order and exponent of a finite group, (preprint).