数理解析研究所講究録
325巻 1978年 190-195

defect 0 の blocks について

小樽商大　和田倶幸

§1　Gを有限群，pを素数とする．

問題．Gがdefect 0のp-blockをもつ為の条件は何か？
今迄に知られている結果として、次の環論的あるいは表現論的なものがある．

1)（Tsushima，[3]）．Kを標数0のGの分解体，$\mathfrak{p}$をpのprime ideal divisor，Rを$\mathfrak{p}$-adic integerのring，$R/\mathfrak{p}$をFとする．$c := \sum_{x:p\text{-elements}} x$，$\delta_1, \cdots, \delta_t$をFGのdefect 0のblock idempotents全体とすると，$c^2 = \delta_1 + \cdots + \delta_t$となる．

2)（Iizuka－Watanabe，[1]）Fは1)におけるFとする．$K_1, \cdots, K_s$をGのdefect 0のconjugate classes全体とし，$M := \sum_{i=1}^{s} F\hat{K}_i$とする．ここで$\hat{K}_i$はclass sum．すると FGのdefect 0のp-blocksの数 $= \dim_F M^2$．

一方群の構造に関する条件としては $O_p(G) = 1$ がGがdefect 0のp-blockをもつ為には必要であるが、一般には

十分でない。solvable group に関する N. Ito の反例は $O_p(G)=1$ でも、G は defect 0 の class さえもっていない。([2])。
それでは G が defect 0 の element をもつ場合、どの様な時に G は defect 0 の p-block をもつか。我々は次の様な群を考える。

Def. G is a (p,q)-group $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $p, q \in \pi(G)$, G does not contain an element of order pq.

Theorem A. Let G be a $(2,p)$-group. Suppose $G \supseteq H \cong D_n$: dihedral of order 2^n with $|C_G(x)| = 2^{n-1} \times \text{odd}$, where $x \in H$, $|x| = 2^{n-1}$. Then G possesses a p-block of defect 0.

Theorem B. Let G be a (p,q); $(2,p)$ and $(2,q)$-group. Then 1) G possesses a p-block of defect 0, or
2) G possesses a q-block of defect 0.

§2 Proofs of Theorems

Remark 1. G が p-solvable (p,q)-group のときは、$O_p(G)=1$ が、G が defect 0 の p-block をもつ為にはやはり十分条件にならないという事がわかる。それは次の事実による。

Lemma 1. $O_{p'}(G) \supseteq K$: conjugate class of defect 0 of G
$\Rightarrow$ G は defect 0 の p-block をもつ。

∵) 後の Lemma 4 の Corollary.

Lemma 1 から "G が p-solvable (p,q)-group のとき $|O_q(G)| \not\equiv 0\ (p)$ なら G は defect 0 の p-block をもつ." は trivial. $|O_q(G)| \not\equiv 0\ (p)$ なら $O_p(G)=1$ であるが, "…" は $O_p(G)=1$ の時には, やはり正しくない. 実際 Ito の反例の index 2 の拡大で involution が p-Sylow 群に fixed point free に働く群を考えれば $O_p(G)=1$ で defect 0 の p-block をもたない solvable $(2,p)$-group となる.

Remark 2. G が 2-rank 1 の $(2,p)$-group なら p-solvable だから Remark 1 で述べた様になる. Theorem A は G の 2-rank $=2$ の場合で, 特に 2-Sylow 群が dihedral な $(2,p)$-group は defect 0 の p-block をもつ. 同様の証明で, G の 2-Sylow 群が 4-group, semi dihedral の場合も $(2,p)$-group は defect 0 の p-block をもつ. 証明は involution の数を数えるという方法のみによる.

Theorem A の証明.

$K_1, \cdots, K_s$ を G の conjugate class 全体としたとき, a_{ijk} を

$$\hat{K_i}\cdot\hat{K_j} = \sum_{k=1}^{s} a_{ijk}\,\hat{K_k}$$

とする. 次の Lemma を使う.

Lemma 2. 次は同値

1) G は defect 0 の p-block をもつ.

2) $\exists\{K_i, K_j, K_k\}$: defect 0 の G-conjugate class, s.t. $a_{ijk} \not\equiv 0\ (p)$.

∵) 1) → 2) は §1 の 2) より明らか.

2) → 1) $|C_G(x_i)|\, a_{ijk} = \sum_{\chi\in \mathrm{Irr}(G)} \chi(x_i)\,\omega_\chi(x_j)\,\overline{\chi(x_k)}$, 但し $x_i\in K_i$, $x_j\in K_j$, $x_k\in K_k$ で $\omega_\chi(x_j) := |G:C_G(x_j)|\,\chi(x_j)/\chi(1)$, であるが仮定から左辺は p と素, 故に $\exists\chi\in \mathrm{Irr}(G)$ s.t. $\omega_\chi(x_j)\not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$ である. K_jが defect 0 だから χ は defect 0 の p-block に属する.

Lemma 3. G は $(2,p)$-group, Gが defect 0 の p-block をもたない ⟹ $|N_G(P)|$ = even for $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, かつ G の involutionsは 1-class

∵) 後の Lemma 4 より, strongly real な p-element が存在するから.

定理 A の証明にもどる. Gが defect 0 の p-block をもたないとする. Lemma 3 より involutions は 1-class K_1. $x\in K_j$ とする. a_{11j} を調べる.

$$a_{11j} = \#\{y : \text{involution} \mid x^y = x^{-1}\}$$
$$= \#\{y : \text{involution} \mid y\in C_G^*(x) - C_G(x)\}$$

仮定から $|C_G^*(x)/\langle x\rangle| = 2\times \text{odd}$ だから $\overline{C_G^*(x)} = C_G^*(x)/\langle x\rangle$ の involutionsは 1-class $\overline{K}$. $\bar{y}\in\overline{K}$ のとき coset $y\langle x\rangle$ の各元は involution だから

$$a_{11j} = |x|\cdot|\overline{K}| = |x|\cdot|\overline{C_G^*(x)} : C_{\overline{C_G^*(x)}}(\bar{y})| \not\equiv 0\ (p)$$

これは Lemma 2 に矛盾.

Theorem B の証明.

次の Lemma を使う.

Lemma 4. $\exists K_i$: defect 0 の G-conjugate class, s.t. $a_{ii^*k} = 0$ for $\forall K_k$: conjugate class of p-elements of G $\Rightarrow$ G は defect 0 の p-block をもつ. ここで $K_{i^*} = K_i^{-1}$.

∵) [4] を見よ.

定理 B の証明にもどる. G が defect 0 の p-block をもたないと仮定する. K_1 を G の involution の class, K_j を任意の q-elements の class とする. G が (2, p), (p, q)-group だから Lemma 2 により $a_{11j} \equiv 0 \ (p)$.

もし $a_{11j} \neq 0$ for $\exists K_j$: class of q-elements of G. ならば, $a_{11j} \mid |C_G(x_j)|$, $x_j \in K_j$ でなければならない. (∵) G は (2, q)-group). $|C_G(x_j)| \not\equiv 0 \ (p)$ より矛盾. 従ってすべての q-elements の class K_j に対して $a_{11j} = 0$ となり Lemma 4 から G は defect 0 の q-block をもつ.

References.

[1] Iizuka - Watanabe : On the number of blocks of irreducible characters of a finite group with a given defect group, Kumamoto J. Sci. (Math.), vol. 9, 55 - 61 (1973).

[2] N. Ito : Note on the characters of solvable groups, Nagoya Math. J. 39 (1970), 23 - 28.

[3] Tsushima : On the block of defect 0, Nagoya M.J. 44 (1971), 57-59.

[4] Wada : On the existence of p-blocks with given defect groups, Hokkaido M.J. 6 (1977), 243-248.