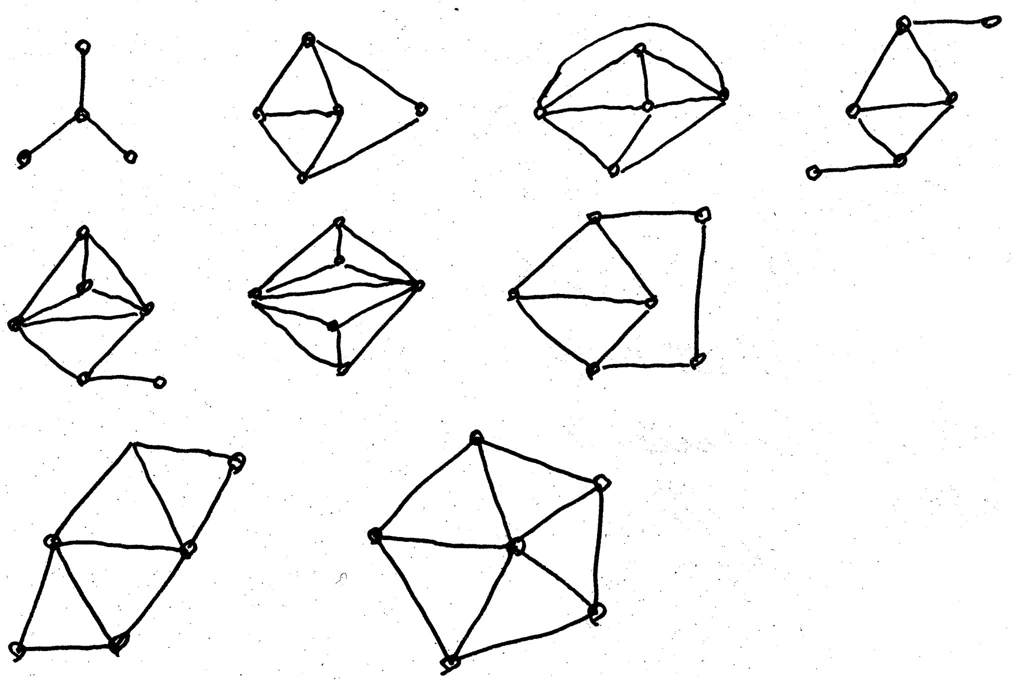
数理解析研究所講究録
325巻 1978年 131-134

すべての固有値が-2以上であるadjacency行列をもつ辺正則グラフについて

阪大 理学部　沼田 稔

line graph の特徴づけについて J. Krausz が 1943 に A. Rooij, H. Wilf, L.W. Beineke 等が 1965 に仕事をしている。

定理(L.W. Beinoke) line graph は次の 9つの部分グラフを含まないことと同値である。



9つの部分グラフの最初のグラフを位数3のclawと呼ぶ。位数3のclawを含まないことがline graphの特徴づけで重要な役割をもつ。

次にグラフの正則性を仮定してline graphを特徴づける仕事がなされた。

各点に対し辺で結ばれている点の数が一定の時、正則グラフと呼び、さらに、辺で結ばれている二点に対し共通に辺で結ばれている点の数が一定の時（すなわち辺を含む三角形の数がどの辺に対しても一定の時）辺正則グラフという。

定理（沼田，1974）連結な辺正則グラフで位数3のclawを含まず、互いに結ばれない三点が存在する時、グラフは次のグラフのいずれかと同型となる。

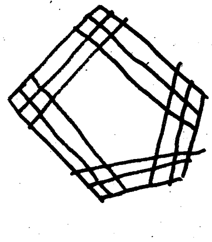
i) 完全グラフのline graph（すなわちtriangle graph）

ii) 三角形を含まない正則グラフのline graph

iii) パラメーター16, 10, 8をもつただ一つの強正則グラフ

iv) 正二十面体の頂点と辺から出来るグラフ。

特にグラフの直径が2の時 i)、iii)のグラフとlattice graph of dimmesion 2、そして下の図で示されるグラフに限る。



グラフ $\Gamma=(V,E)$ の adjacency 行列 $A(\Gamma)$ を次のように定義する。 $A(\Gamma)=(a_{ij})$, $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$ に対し、

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } (v_i,v_j)\in E\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

グラフ $\Gamma=(V,E)$ の incidence matrix $X(\Gamma)$ は

$X(\Gamma)=(x_{ij})$ $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } v_i \text{ and } e_j \text{ are incident}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

次の式が成立する。 ただし $L(\Gamma)$ は Γ の line graph.

$$(X^t)X = A(L(\Gamma))+2I_m .$$

したがって次の proposition をもつ。

Prop. λ を line graph $L(\Gamma)$ の adjacency 行列の固有値とすれば $\lambda \geqq -2$.

上のことから固有値によって line graph を特徴づける問題が起きる。前の Beineke の定理にある 9 つの部分グラ~~グラ~~フの adjacency 行列の固有値はすべて -2 以上であるから、何の条件もなしには line graph を特徴づけることは不可能である。

グラフが正則である場合その line graph の adjacency 行列の固有多項式はもとのグラフの adjacency 行列の固有多項式

から自動的に計算出来るという次の定理がある。

定理（Sachs 1967）　Γ は regularity k の正則グラフで　n 個の点と $m=\frac{1}{2}kn$ 個の辺をもっているとすると

$$\chi(L(\Gamma);\lambda)=(\lambda+2)^{m-n}\chi(\Gamma;\lambda+2-k)$$

（ただし $\chi(\Gamma;\lambda)$ は Γ の adjacency 行列の固有多項式）

上の定理により正則グラフの line graph は かなり多くの重複度で最小固有値 -2 をもつ。

J. Seidel は 最小固有値 -2 をもつ強正則グラフを完全に分類した。　この結果は次のように拡張される。

定理、Γ を連結な辺正則グラフで そのadjacency行列のすべての固有値が-2以上であるならば Γ は次のグラフのいずれかと同型である。

i)　完全グラフ　　ii)　hyperoctahedral graph

iii)　clebsch graph　iV)　完全グラフの line graph

V)　三角形を含まない正則グラフの line graph

Vi)　Schläfli graph　　Vii)　Petersen's graph

Viii)　The pseudolattice graph $L_2'(4)$

iX)　The psudotriangle graph $T'(8)$, $T''(8)$, $T'''(8)$