数理解析研究所講究録
325巻 1978年 128-130

1点のstabilizerが2つのsuborbits上2-transに作用するランク5原始置換群について

阪大 理学部 沼田 稔

Gは有限集合Ω上の原始置換群で2重可移でないとする。Ω×Ω上Gを成分ごとに作用させた時のorbitsを $\Delta_0, \Gamma_1, \cdots \Gamma_s, \Delta_1, \cdots, \Delta_t$ とし $\Delta_0 = \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ とする。

$G_\alpha = \{g \in G \mid \alpha^g = \alpha\}$ が $\Gamma_i(\alpha) = \{\beta \mid (\alpha,\beta) \in \Gamma_i\}$ 上 $(1 \leqq i \leqq s)$ 2重可移で $\Delta_j(\alpha)$ 上 $(1 \leqq j \leqq t)$ 2-transでないとする。

次の結果が知られている。

Theorem (沼田) $t > 1$, $|\Gamma_i(\alpha)|, |\Delta_j(t)| > 3$ $(1 \leqq i \leqq s,\ 1 \leqq j \leqq t)$ ならば

$$s \leqq 2t - r$$

ここで $r = \#\{\Delta_j \mid \Delta_j = \Gamma_i \circ \Gamma_i^*,\ \exists \Gamma_i\}$

特に $r=1$ のときは $s \leqq 2t-2$.

この結果を使うと $t=2$ の時 $s \leqq 2$ である。

$t = s = 2$ の例

1. small Janko simple group J_1 は $PSL(2,11)$ と同型な部分群を含み、この部分群の cosets 上に primitive rank 5 に作用し条件を満す。degree 266, subdegrees 1, 11, 12, 110, 132 である。

2. Mathieu 群 M_{12} は $PSL(2,11)$ と同型な部分群を含み、この部分群の cosets 上に primitive rank 5 に作用し条件を満す。degree 144, subdegrees 1, 11, 11, 55, 66.

3. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ と S_4 の半直積の部分群 S_4 の cosets 上に rank 5 に作用し条件を満す。degree 27 subdegrees は 1, 4, 4, 12, 6 である。

さて G を Ω 上 primitive rank 5 とし $\Omega \times \Omega$ 上 G の non-trivial orbits を $\Gamma_1, \Gamma_2, \Delta, \Sigma$ とし G_α が $\Gamma_1(\alpha), \Gamma_2(\alpha)$ 上 2-trans, $\Delta(\alpha), \Sigma(\alpha)$ 上 2-trans でないとする。
$\Gamma_1 \circ \Gamma_1^* \neq \Gamma_2 \circ \Gamma_2^*$ の時は 伊藤達郎氏の結果を使えば、例1 に限ることが証明される。

$\Gamma_1\circ\Gamma_1^*=\Gamma_2\circ\Gamma_2^*$, そして $|\Gamma_1(\alpha)|\neq|\Gamma_2(\alpha)|$ の場合 (Ω,Γ_1) (Ω,Γ_2) は共に直径3の distance transitive graph となるが、この場合の例は知られていないし、多分存在しないと思うが証明出来ない。

最後に残った場合について次のことが証明された。

Theorem $\Delta=\Gamma_1\circ\Gamma_1^*=\Gamma_2\circ\Gamma_2^*$, $|\Gamma_1(\alpha)|=|\Gamma_2(\alpha)|$ の時

i) $\pi_1=\pi_2$ ii) Γ_1,Γ_2 は互いに paired

iii) $\Gamma_1\circ\Gamma_1=\Gamma_1^*\cup\Sigma$. ($\pi_i$ は $\Gamma_i(\alpha)$ 上 G_α の permutation character)

証明の概略. $\pi_1=\pi_2$ の証明は簡単である。
$\Gamma_1\circ\Gamma_2^*\neq\Delta\cup\Sigma$ が証明されれば ii) は明らかであり P.J. Cameron の結果($\Gamma\neq\Gamma^*$, if $\Gamma\circ\Gamma\subset\Gamma\cup\Gamma^*\cup\Gamma_1\circ\Gamma^*\cup\Gamma_1^*\circ\Gamma_1$, G has rank 4)を使えば iii) が証明される。 $\Gamma_1\circ\Gamma_2^*=\Delta\cup\Sigma$ と仮定し $\Gamma_1\circ\Gamma_2^*=\Gamma_2\circ\Gamma_1^*$ であること、Γ_1 に関する intersection matrix の trace の整数条件から矛盾を引きだす。
計算はめんどうであるが難かしいことは使わない。