数理解析研究所講究録
325巻 1978年 124-127

内部部分群をもつ有限群

東工大 理　野村和正

群はすべて有限群とする。群 G の部分群 H が

$$N_G(H) / C_G(H) = Aut(H)$$

をみたすとき，H を G の内部部分群という．

定理１　すべての部分群が内部部分群であるような群は S_1, S_2, S_3 に限る．

定理２　すべての可換部分群が内部部分群であるような可解群は，S_1, S_2, S_3, Q_8 に限る．

定理１の証明は容易なので略す．すべての可換部分群が内部部分群であるような群を，以下 AI-群 とよぶ．

つい最近，宮本雅彦氏（北大理）により，AI-群の可解性が証明された．従って，AI-群は上記のものに限る．

まずAI-群の基本的な性質をまとめておく．証明は簡単なので省略する．

<u>補題</u>　GをAI-群，$p \in \pi(G)$，$P \in Syl_p(G)$とする．

(1)　$|Z(P)| = p$.

(2)　Gの位数pの元は互に共役．

(3)　$N \triangleleft G$，$(|G/N|, |N|) = 1 \implies G/N$ もAI-群

(4)　MをPの極大可換正規部分群とすると

$$C_G(M) = T \times M$$

なる p'-群 Tがあり，TもAI-群になる．

以下，定理2の証明を行う．S_1, S_2, S_3, Q_8と異なる可解AI-群が存在すると仮定し，そのうちで位数最小のものをGとする．Gは可解だから，$m_2(G) = 1$ または $m_2(G) = 2$ のいずれかである．

まず，$m_2(G) = 1$ の場合を考える．$S \in Syl_2(G)$とする．Sは index 2 の巡回部分群Kをもち，$S/K = \mathrm{Aut}\,K$ だから，$S \cong Z_2$ または $S \cong Q_8$．もし $m_3(G) \geq 2$ とすると，$Z_3 \times Z_3$ をGが involveするが，$\mathrm{Aut}(Z_3 \times Z_3)$の位数は$2^4$で割れるから否．よって $m_3(G) = 1$．従って，Gの odd Sylow群は すべて巡回群．Gの最小性と．補

題(3)により，$F(G)$ は 2-群になる． 同じ理由で，$S \nleq F(G)$． よって $F(G) \cong Z_2$ または Z_4． Gは可解だから，$C_G(F(G)) \subseteq F(G)$． よって $|G/F(G)| \leqq 2$，つまり $|G| \leqq 8$ となり不合理．

以下 $m_2(G)=2$ とする．

まず$F(G)$が偶数位数と仮定する． $S_0 \in Syl_2(F(G))$，$M=\Omega_1(Z(S_0))$ とおくと，MはGの involution をすべて含み，$M \cong Z_2 \times Z_2$． Mの位数3の自己同型を導くGの元 x をとる． とくに x は 3-element にとれる． $N_G(\langle x\rangle)$ は偶数位数だから，$N_M(\langle x\rangle) \neq 1$．$[N_M(\langle x\rangle), x] \leqq M \cap \langle x\rangle = 1$ より $C_M(x) \neq 1$．これは，xがM上で位数3であることに反する． 従って$F(G)$は奇数位数である．

Gの最小性と補題(3) より，$F(G)$は 3-群． $M=\Omega_1(Z(F(G)))$ とおくと，$M \cong Z_3 \times Z_3$． いま $p \in \pi(G)$，$p \geqq 5$ なる pがあるとすると，補題(4) により，$M \nleq C_G(P)$，ここで $P \in Syl_p(G)$． 従って $P \leqq Aut(M)$ となるが，$|Aut\,M| = 2^4 \cdot 3$ だから不合理． よってGは$\{2,3\}$-群である．

$C_G(M)$は偶数位数である． なぜなら，もし奇数位数とすると，Gの 2-Sylow群 S は $Aut\,M$ の 2-Sylow

群に同型だから $|S|=2^4$ で，かつ S は位数 8 の元 x を含む．これは $\langle x\rangle$ が内部部分群であることに反する．従って $C_G(M)$ は偶数位数であり，G のすべての involution を含んでいる．

さて，$R\in Syl_3(G)$ とし，M を含む R の極大可換正規部分群 L をとる．もし $C_G(L)=L$ であるとすると，L の元を invert する G の involution x があるが，$x\in C_G(M)$ となり不合理．よって $C_G(L)>L$．

$C_G(L)=T\times R$ とすると，$T=Z_2$ または Q_8 である．T の involution を τ とおく．$H=C_G(\tau)$ とおくと，$C_G(L)\leqq H$ である．$\langle\tau\rangle\times L$ は G の内部部分群だから，$N_H(L)/C_H(L)=\mathrm{Aut}\,L=N_G(L)/C_G(L)$．よって $N_G(L)=N_H(L)$．これから $R\leqq N_H(L)\leqq H$．さらに H は G の 2-Sylow 群をも含んでいるから，G が $\{2,3\}$-群であることにより $H=G$．つまり $\tau\in Z(G)$．従って，G は唯1つの involution τ をもつことになり，$m_2(G)=2$ に反する．　　　証明終．