数理解析研究所講究録
325巻 1978年 118-121

On the p-rationality of lifted characters.

大阪市大理　　延里嘉保

pー可解群に関する Fong-Swan の定理を考えるとき，次の結果は究極的な形を与えているといってよい。

定理　(I. M. Isaacs)

G は p-solvable，φ は G の irreducible Brauer character とする。　このとき

(i) $\exists \chi \in \mathrm{Irr}(G)$ such that χ は p-rational で，$\chi \equiv \varphi$ on p-regular elements. また $p \neq 2$ なら χ は unique

(ii) $p \neq 2$，$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ は p-rational で modularly irreducible とする。このとき，$N \triangleleft G$，$\chi_N \supset \zeta$ とすると，ζ も p-rational で，modularly irreducible

さて，この定理の証明であるが，かなり難解である。

というわけで，Feit は次のことを示し，簡単な証明を（つまり Fong の理論の範囲内での証明）与えている。

(I) $\chi \in Irr(G)$ が p-rational で modularly irreducible なら $\ker\chi \supset O_p(G)$．ただし $p \neq 2$

(II) Fong の Second Reduction（Fong [2] の Theorem(2D)）における ordinary characters の間の一対一対応が，p-rationality を保存するとしてよい。

ただし，(II) の方は，その証明に少々怪しい所がある。つまり，Feit [ ] の Chap. X に見られる命題(1.1)の(ii)の部分の主張については，その証明がそのまま通用するとは思われない。とは言うものの，次のことの成立が示され，Feit の目論見が O.K であることに変わりはない。

命題． H は G の normal p'-subgroup，$\theta \in Irr(G)$ は G-stable とする。$|G||H|^2 = p^a m$，$(p, m)=1$
$K = Q(\zeta_m)$ （ζ_m は 1 の原始 m-乗根）
このとき，次のような central extension

$$1 \longrightarrow Z \longrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\ \tau\ } G \longrightarrow 1$$

及び $\tilde{\theta}\in Irr(\tilde{G})$ がとれる。

(i) Z は cyclic で $|Z|$ は $|H|^2$ を割り切る。

(ii) $\exists \tilde{H} \triangleleft \tilde{G}$ such that $f^{-1}(H)=\tilde{H}Z=\tilde{H}\times Z$

(iii) $\tilde{\theta}$ は K 上 realizable で，$\tilde{\theta}(\tilde{h})=\theta(f(\tilde{h}))$ $\forall \tilde{h}\in\tilde{H}$

Feit が主張しているのは，「$|H|^2=n$ としたとき，$\tilde{\theta}$ が $Q(\zeta_n)$ 上 realizable にとれる。」ということであるが，この部分の証明に問題があるわけである。

さて，この命題の証明は，既成の方法の踏襲に過ぎないのであるが，少々煩雑である。そのため，Nobusato [4] に譲ることにする。また，この命題を使って Fong の Second Reduction が改良されるわけであるが，「$\tilde{\theta}$ が K 上 realizable」ということは，特に威力があるわけではない。つまり p-rationality のみで十分なのである。

最後に $p=2$ の場合に少し触れておこう。少々弱いのであるが，次のことは容易に示される。

(III). G は solvable とし，2-block について考える。φ は irreducible Brauer character，$G\triangleright N$ とすると，次のような $\chi\in Irr(G)$ がとれる。

(i) $\chi\equiv\varphi$ on 2-regular elements

(ii) χ 及び χ_N の各成分は p-rational で modularly irreducible.

文献

[1] W. Feit: Representations of finite groups, Lecture note, Yale University, New Haven, 1965–1975

[2]. P. Fong: On the characters of p-solvable groups Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961) pp 263–284

[3]. I. M. Isaacs: Lifting Brauer characters in p-solvable groups, Pacific, J. Math 53 (1974) pp 171–188

[4]. Y. Nobusato: On the p-rationality of lifted characters, to appear in Math. J. Okayama. Univ.