数理解析研究所講究録
325巻 1978年 93-95

素数位数の自己同型を持つ群について

阪大 理　松山 広

以下，有限群Gとその自己同型φを，次の*Hypothesis*を満たすものとする。

Hypothesis

$$\left\{\begin{array}{l} G \text{ は有限群},\ \varphi \in \mathrm{Aut}(G),\ |\varphi| = r : \text{a prime}, \\ (r, |G|) = 1,\ C_G(\varphi) ; \pi\text{-group} \end{array}\right.$$

Conjecture A.

$O^{\pi}(G/O_{\pi}(G)) = \overline{N} \times \overline{E}_1 \times \cdots \times \overline{E}_n$ となるか？

但し $\overline{N}$ は φ-不変な nilpotent π-group

$\overline{E}_i$ は φ-不変な simple group $(i = 1, \cdots, n)$

Definition I

1) φ が $(*)$ を満たす $\Leftrightarrow$ イ) Sylow 2-subgroups of $C_G(\varphi)$ は abelian

or ロ) $r \neq$ Fermat prime

or ハ) Sylow q-subgroup of G は abelian, $q \equiv 1\ (r)$

ii) σ : a set of primes

φ が O_σ-automorphism

$\Leftrightarrow$ $q \in \sigma$ に対して, G の φ-inv Sylow q-subgroup は unique に存在する。

N.B)

φ が $O_{\pi'}$-auto であるか, 又は G が可解のとき $G/F(G)$ は π-group である。

Proposition 2.

G は可解とする. さらに, φ が(*)を満たすか, 又は φ が $O_{\pi'}$-automorphism とする。このとき, $O^\pi(G/O_\pi(G))$ は nilpotent な π'-group となる。

Conjecture B

$M = O^q(G) \subsetneq G$, $q \notin \pi$, M は simple group かつ π-group ではないとする。このとき, $G = O_q(G) \times M$ か?

Proposition 3.

φ が(*)を満たすものとする。このとき, G において, Conj. A が成立することと, Conj. B が成立することは, 同値である。

Proposition 4.

$O^q(G) = M$; q'-group. Qをϕ-不変なSylow q-subgroup of Gとする。さらに、Gはϕ-不変なHall π-subgroupを持つか、又は$C_M(Q\langle\phi\rangle) = 1$とする。

このとき、Conj. Bの結果が(G)で成立する.