数理解析研究所講究録
325巻 1978年 59-63

On finite groups with exactly two real conjugate classes

一橋大学　　岩崎 史郎

有限群Gの元xは，Gに於て逆元x^{-1}と共役であるとき，realといわれます．たとえば，Gの単位元，任意のinvolutionはrealであり，realな元の共役元はすべてrealになります．また，KをGの1つの共役類とするとき，Kの1つの元，従ってすべての元がrealである場合（即ち，$x \in K \Rightarrow x^{-1} \in K$），Kはrealといわれます．次のことはよく知られています．

"The number of real conjugate classes in G
= the number of real-valued irreducible complex characters of G"（以下，この個数を<u>r(G)</u>とおくことにします）

そこで，自然に，次の問題が考えられます．

<u>Problem</u>. What relations are there between r(G) and the structure of G? Characterize G by r(G).

r(G)が最大のとき，即ち，Gのすべての共役類（元）がreal

のときは，Berggren, Kerber等によっていくらか調べられています([1],[3])．$r(G)$が最小($r(G)=1$) のとき，即ち，単位元のみがGのrealな共役類(元)である場合は，定義からすぐわかるように，

◎ (Burnside) "$r(G)=1 \iff |G|=\text{odd}$".

既知の単純群のcharacter tableを見ていると，$r(G)$は比較的大きいようですが，このことはすべての単純群にいえるのでしょうか？ あるいは，何かを示唆しているのでしょうか?

ここでは，以下，Burnsideの$r(G)=1$の場合の続きとして$r(G)=2$の場合を考えることにします．結果を述べる前に，G. Higmanの記号を導入しておきます．

Notation：$n>1$を自然数とし，$q=2^n$とおき，θを有限体$GF(q)$のodd(>1) orderのautomorphismとします．集合としての直積$GF(q)\times GF(q)$に乗法を

$$(a,x)(b,y)=(a+b,\ x+y+ab^{\theta})$$

で定義してえられる群を$A(n,\theta)$で表わすことにすると，これはexponent 4のnon-abelian 2-groupとなります[2]．また，Xを任意の群とするとき，$I(X)$ = the set of all the involutions of X.

得られた結果は次の通りです．

<u>Proposition</u>. Let G be a finite group and S be a Sylow 2-subgroup of G. Then the following I and II are equivalent.

I. $r(G) = 2$ (i.e., G has exactly two real conjugate classes)

II. (i) $S \lhd G$ and G possesses a subgroup H of odd order such that $G = HS$ (semi-direct product) and H acts by conjugation transitively on $I(S)$.

and

(ii) (a) S is homocyclic, or

(b) $S \cong A(n, \theta)$, and if $x \in S$ is conjugate to x^{-1} in G, then $x = 1$ or involution.

$r(G) = 1$ の場合のように G はすっきり決まりませんが，ともかく 2-Sylow 群は正規で完全に決まるわけです．次に例をあげておきます．勿論，以下に定義される G の real conjugate classes は単位元と $I(S) = I(G)$ です．

(a) Case S is homocyclic

example 1. S = any cyclic 2-group

H = any finite group of odd order

$G \overset{\text{def}}{=} H \times S$.

example 2. $S = GF(2^n)$ $(= (2,2,\cdots,2)$ abelian $)$

$GF(2^n) - \{0\} = \langle \lambda \rangle$: cyclic group

For $\mu \in \langle \lambda \rangle$, $x^{\tilde{\mu}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mu x$ $(x \in S)$, then $\tilde{\mu} \in \mathrm{Aut}\, S$.

$G \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \tilde{\lambda} \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

example 3. $S = A(n, 1)$ i.e., Put $S = GF(2^n) \times GF(2^n)$ and define a multiplication by $(a,x)(b,y) = (a+b, ab+x+y)$. (then $S = (4,4,\cdots,4)$ abelian).

For $\mu \in GF(2^n) - \{0\} = \langle \lambda \rangle$, $(a,x)^{\tilde{\mu}} \overset{\mathrm{def}}{=} (\mu a, \mu^2 x)$, then $\tilde{\mu} \in \mathrm{Aut}\, S$ and set $G = \langle \tilde{\lambda} \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

example 4. $S = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ $(\langle a \rangle, \langle b \rangle$: cyclic groups of order $2^n)$

define $\sigma : \begin{cases} a \longrightarrow b \\ b \longrightarrow a^{-1} b^{-1} \end{cases}$

then σ is an automorphism of S of order $3 = |I(S)|$

$G \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \sigma \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

example 5. $S = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle c \rangle$ $(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \langle c \rangle$: cyclic groups of order $2^n)$

define $\sigma : \begin{cases} a \longrightarrow b \\ b \longrightarrow c \\ c \longrightarrow a b^{e+1} c^{e} \end{cases}$

Then $\sigma \in \mathrm{Aut}\, S$. If e is a solution of the congruent equation $x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod{2^n}$, then σ is of order $\underset{|I(S)|}{\overset{}{7}}$.
(this congruent equation is solvable for any n)

$G \overset{\mathrm{def}}{=} \langle \sigma \rangle \cdot S$ (semi-direct product)

(In general, perhaps, homocyclic group $S = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_m \rangle$

has an automorphism σ of S of order 2^m-1 such that $\langle\sigma\rangle$ acts transitively on $I(S)$.)

(b) Case $S \cong A(n,\theta)$

For $\mu \in GF(q)-\{0\} = \langle\lambda\rangle$, $(a,x)^{\tilde{\mu}} \overset{\text{def}}{=} (\mu a, \mu^{\theta+1}x)$, then $\tilde{\mu} \in \mathrm{Aut}\, S$ and put $G = \langle\tilde{\lambda}\rangle \cdot S$ (semi-direct product).

命題自身の証明は容易で，本質的にはHigman[2]によります．即ち，$S \lhd G$を示し，Shaw[4]を通じて[2]に帰着されるからです．この命題の証明にあたって，榎本彦衛，宮本泉氏に有益なsuggestをして頂いたことを感謝します．

参考文献

[1] J. L. Berggren : Finite groups in which every element is conjugate to its inverse, Pac. J. Math. 28 (1969), 289－293.

[2] G. Higman : Suzuki 2-groups, Ill. J. Math. 7 (1963), 79－96.

[3] A. Kerber : Zu einer Arbeit von J. L. Berggren über umbivalente Gruppen, Pac. J. Math. 33 (1970), 669－675.

[4] D. L. Shaw : The Sylow 2-subgroups of finite, soluble groups with a single class of involutions, J. Alg. 16 (1970), 14－26.