数理解析研究所講究録
325巻 1978年 39-41



# 2-Factorization in Finite Groups

愛教大　　林　誠

$p$を素数、$G$を有限群、$S$を$G$の1でない$p$-部分群とする。$G$の部分群の族$\mathcal{G}(S)$を次の様に定義する：

$\mathcal{G}(S) \ni H \iff$ (1) $S$は$H$の$p$-Sylow群　(2) $C_{p;E}(H) \subseteq C_{p'}(H)$

(3) $H$は$Qd(p)$をinvolveしない。

問題1. $S$を媒介として、$\mathcal{G}(S)$の元同士にはどんな関係があるか？ 特に、$\mathcal{G}(S)$に包含関係で最大元が存在するか？

問題2. $G$と$\mathcal{G}(S)$の関係は如何に？

これ等の問題はThompson, Glauberman等に依り提唱され、主に彼等に依って、幾つかの目覚ましい結果が得られた。しかし、$p=2$に対する結果は未だに不十分であり、こゝでは、その場合に関する結果を紹介する。

尚、最近新たに、条件(3)を除いて、$H$及び$G$の構造を考察する問題"Failure of Factorizations","Pushing up Theorems"がGlauberman, Ho, Aschbacher, Dauman, Niles等に依り研究されている。

定義：$\pi$を素数の集合，$X$を有限群とするとき，$\mathcal{U}(X:\pi)$で$X$にinvolveされるすべての部分群$D$で，次の性質を有するものを表わす．($\alpha$) $D \triangleright^{\exists} E$：単純群，($\beta$) $C_D(E) \subseteq E$

($\gamma$) $D/E$は$\pi$に属する或る素数$p(\geq 5)$に対し，位数$2p$の2面体群をinvolveする。

定理：$\pi$を素数の集合，$S$を$G$の1でない2-部分群とする。

仮定：　$1 \neq {}^{\forall}T \subseteq S$　　such that $T \triangleleft N_G(S)$

に対し，

(1) $S$は$N_G(T)$の或る2-Sylow群の中で正規，

(2) $\mathcal{U}(N_G(T)/C_G(T):\pi) = \phi$

このとき，$S$の1でない部分群$W(S)$で次の条件を満たすものが存在する，

(a)　$W(S) \triangleleft N_G(S)$

(b)　$W(S)O(H) \triangleleft H$

こゝで，$H$は次の条件を満たす$G$の任意の可解部分群

($\alpha$) $S$は$H$の2-Sylow群

($\beta$) $H$は$Qd(2)(\cong S_4)$-free

($\gamma$) $H$は$\pi$-group

(注.1). 定理の条件(1)は$S$が$G$の或る2-Sylow群の中で正規ならば満たされる。

(注.2) $W(S)$ は $H$ に依らない。

$H$が非可解の場合も、$N_G(T)$ ($1 \neq \forall T \subseteq S$ such that $T \triangleleft N_G(S)$) の単純組成因子を制限することに依り、同様の定理が成りたつ。

これより、次の定理を得る。

定理(Glauberman): $G$ を $S_4$-free な有限群とする。このとき、$G$の2-Sylow群は strongly closed な可換群($\neq 1$)を含む。

系(Glauberman Goldschmidt). $G$ を $S_4$-free な有限単純群とすると、$G$ は Goldschmidt 群.