

渦列における渦の成長

農工大一般教育 高木隆司

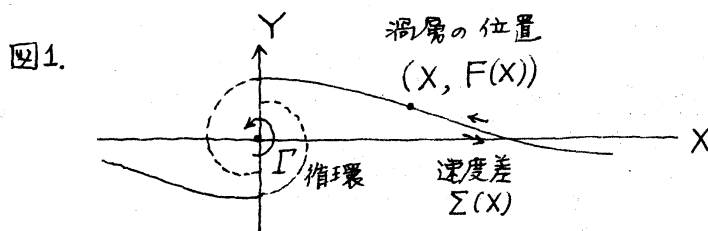
最近、乱流境界層内の秩序構造が注目を集めている。その内でも、2次元混合層は、一列に渦が並ぶような構造を持つので可視化が容易であるし、解析も行いやすい。観察によれば、混合層（自由境界層、剥離層ともいう）を作るためのしきり板から次々と渦が放出され、下流に流されるにつれて隣りどうしの渦が合併している。合併と合併の間の期間でも、ポテンシャル領域の流体を巻きこむことによって、渦自身は太っていく。これらの効果のために、混合層は下流に行くに従って直線的に厚くなっていく。

筆者と Kovasznay は、最近、渦の集合を統計的に扱って、隣り合う渦の間隔の分布を求めた¹⁾。結果は、Brown & Roshko²⁾による測定と一致した。このように、秩序構造を持つ乱流の解析には、構造の一単位に着目し、その集合を統計的に扱うのが有力な方法である。理論的に求めたいことのひとつに、

混合層の成長速度がある。これを求めるには、合併による奇
 与と渦自身の成長の奇与を両方とも考えねばならない。本論
 文の目的は、この後者を求める一方法について述べることで
 ある。

渦列の中のひとつの渦の成長には、その他の渦が影響を与
 えているかも知れない。しかし、第一近似としては、他の渦
 の列を一枚の渦層におきかえてよい。こうして、解析すべき
 問題は、無限に広い渦層の中で一個の渦が巻き上がったとき、
 渦層と周囲の流体を巻きこんでいく速さを求めよということ
 になる。

図1のように座標系を選び、原点に渦の中心があるとする。
 ただし、渦層の十分遠くでの速度差を ΔU 、時間を t として、
 長さは $\Delta U \cdot t$ で、渦層の速度差は ΔU で、流速は ΔU で、中
 央の渦の循環は $\Delta U^2 t$ で規格化してある。つまり、渦層は相



似を保ち直線的に成長することを仮定している。この仮定は、

粘性が重要でない場合正しい。

その他、次のような仮定をおく。

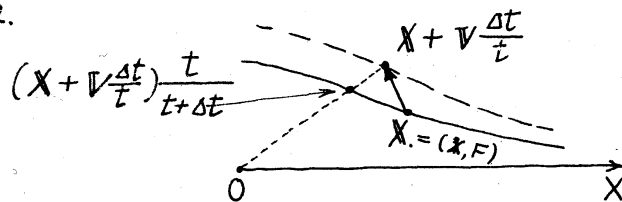
- (1) 2次元,
- (2) 渦層は十分薄い,
- (3) 渦層は, 図1のようには, $X > 0$ の部分, $X < 0$ の部分, 原点にある渦点の3つから成る,
- (4) $X > 0, X < 0$ の部分の渦層はほぼ水平.

未知数および未知関数は, $\Gamma, F(X), \Sigma(X)$, 渦層が運ばれる速度 $V_x(X), V_y(X)$ である。これらを決定するための関係式は以下に述べるように5つある。

(I). 規格化された空間では, 渦層は自分自身に沿って動く。

図2は, この条件を数式の形に表現するためのものである。実線で表わした渦層が Δt 後に, 速度 $V = (V_x, V_y)$ のために点線の位置まで来る。ところが, 長さの規格を $\Delta U \cdot (t + \Delta t)$ でやりなおすと, 再びもとの渦層の形に一致する。渦層の勾配

図2.



が dF/dX で表わされることに注意すると, この条件は次式で表わされる。

$$(X + V \Delta t/t) \frac{\Delta t}{t + \Delta t} - X \quad // \quad (1, \frac{dF}{dX}).$$

この式を変形すると、次式になる。

$$V_Y - F = (V_X - X) \frac{dF}{dX}.$$

(II) 渦層が引伸されると、単位長さ当りの循環、すなわち速度差 $\Sigma(X)$ が減少する。途中を省略して、この条件は

$$\Sigma(X) \frac{dV_X}{dX} = \{X - V_X(X)\} \frac{d\Sigma(X)}{dX}$$

となる。ただし、仮定(4)を使った。

(III) 渦層が運ばれる速度は、渦層の他の部分によって誘導される。仮定(3)(4)を使い、この条件は次式で表現される。

$$\begin{aligned} (V_X, V_Y) = & \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{(-F, X)}{X^2 + F^2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Sigma(X') \{-F(X) - F(X'), X + X'\}}{(X + X')^2 + \{F(X) + F(X')\}^2} dX' \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_0^\infty \frac{\Sigma(X') \{-F(X) + F(X'), X - X'\}}{(X - X')^2 + \{F(X) - F(X')\}^2} dX'. \end{aligned}$$

ただし、 \mathcal{P} は主値を表わす。

(IV) 中心の渦の循環は、両側の渦層から巻きこんだ量に等しい。すなわち、仮定(4)を使い、

$$\Gamma = 2 \int_0^\infty \{1 - \Sigma(X')\} dX'.$$

以上の連立微分方程式を解けばよいのだが、簡単に近似解を求めるために、まず $X \rightarrow \infty$ の漸近形を求める。結果は、

$$F(x) \sim \frac{1}{4\pi x^3} \int_0^\infty x'^2 (\Sigma(x') - 1) dx' \equiv \frac{a}{x^3} \quad (a < 0),$$

$$\Sigma(x) \sim 1 + \frac{3}{2\pi x^4} \int_0^\infty x' \Sigma(x') F(x') dx' \equiv 1 + \frac{b}{x^4} \quad (b > 0),$$

$$V_x(x) \sim \frac{2}{\pi x^3} \int_0^\infty x' \Sigma(x') F(x') dx' \equiv \frac{c}{x^3} \quad (c > 0),$$

$$V_r(x) \sim \frac{1}{\pi x^3} \int_0^\infty x'^2 (\Sigma(x') - 1) dx' \equiv \frac{d}{x^3} \quad (d > 0).$$

この漸近形を考慮して、 F と Σ の近似形を次の形に仮定する。

$$F(x) \cong -\beta \delta \frac{1}{\sqrt{(x/A)^2 + 1}} \left\{ \frac{1}{\{(x/A)^2 + 1\}^2} - \frac{\varepsilon'}{\{(x/A)^2 + 1\}^3} \right\}$$

$$\Sigma(x) \cong 1 + \delta \left\{ \frac{1}{\{(x/A)^2 + 1\}^2} - \frac{\varepsilon}{\{(x/A)^2 + 1\}^3} \right\}$$

ただし、 $\beta, \delta, \varepsilon, \varepsilon' > 0$ 、 $A > 0$ 。これらの5つのパラメータは、上記の5つの関係式を最4よく満たすように決められる。その計算は、電子計算機を使った（日本ミニコン、NOVA 01）。

結果は図3に示す。図からわかるように、渦層は $X \sim 0$ あたりで ∞ の約1割の厚さになっており、巻き込みの上下方向のサイズは $0.054 \times 2 \cdot \Delta U \cdot t = 0.108 \Delta U \cdot t$ である。このサイズが、渦列におけるひとつの渦の成長の速さを与えると考えられる。その速さは $0.108 \Delta U$ である。

$\sigma/\delta = 0.29,$ $B = 0.245,$ $A = 0.237,$ $C = 19.7,$ $C' = 5.71,$
 $\delta = 0.0467,$ $T = 0.239$

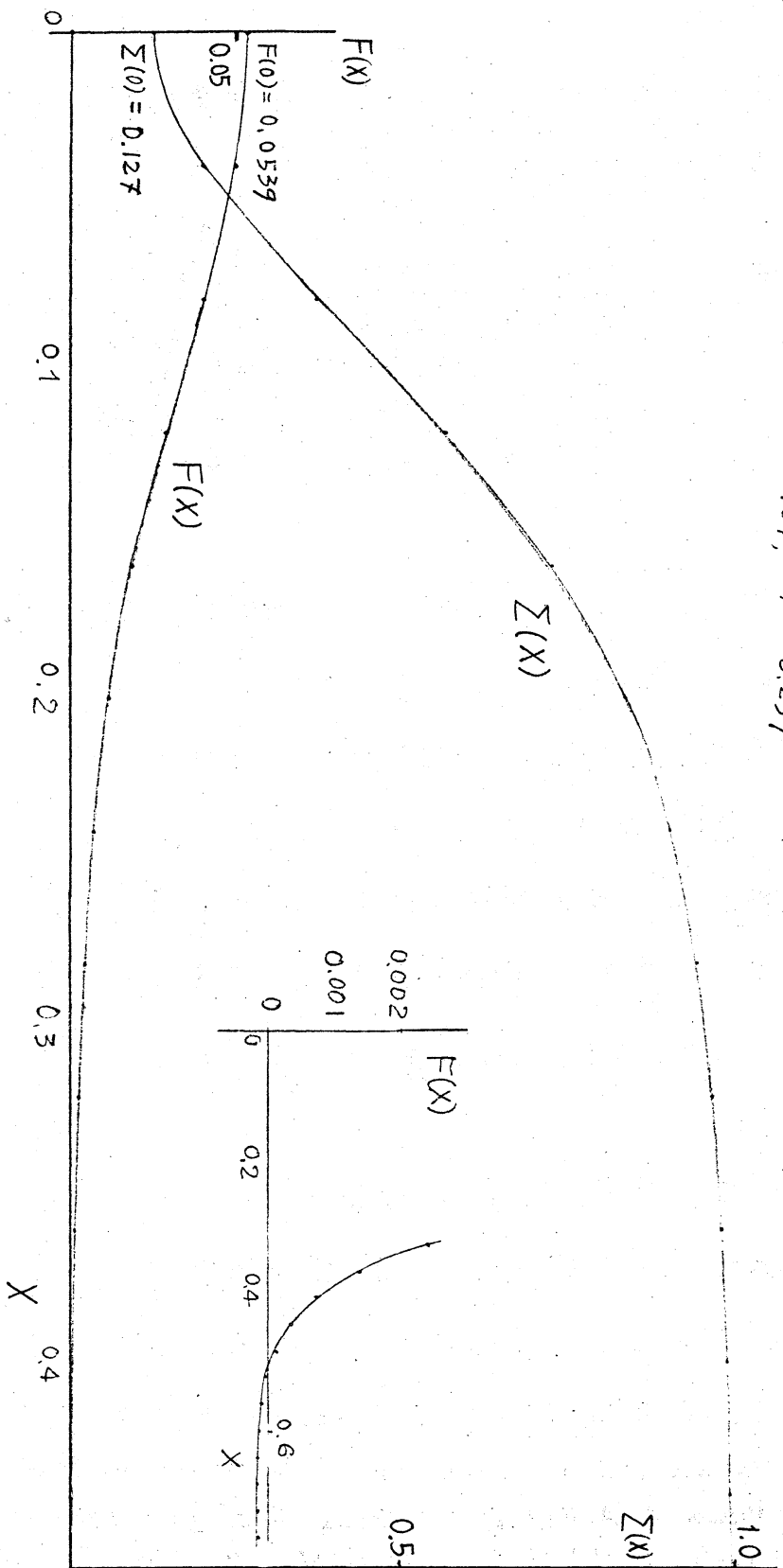


圖 3.

次のような方法で、混合層の成長速度を求めてみる。
渦は等しい大きさを持ち、規則的に並んでいると仮定する（

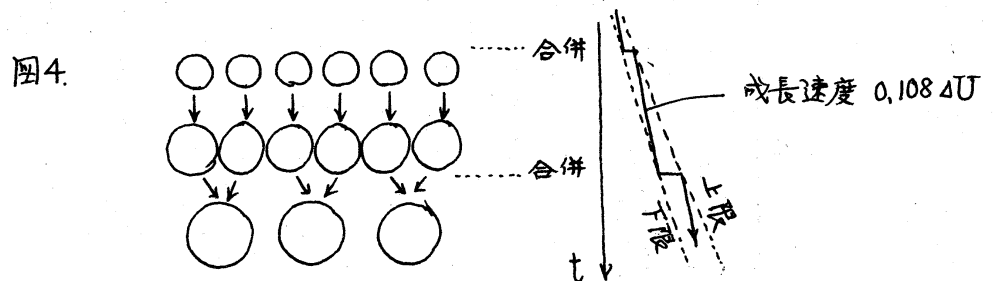


図4). 渦同士が接触したら瞬時的に合併し、面積が保存されるような $\sqrt{2}$ 倍の大きさの渦になると仮定する。すると、図の点線で表わした、成長速度の上限と下限はそれぞれ $0.260 \Delta U$, $0.184 \Delta U$ であり、平均は $0.222 \Delta U$ である。

実験では、混合層は時間的ではなく主流方向に空間的に成長する。そこで、混合層の上下の速度を U_1, U_2 として、

$$\frac{1}{2}(U_1 + U_2) \frac{d}{dx} \equiv \frac{d}{dt}$$

によって、実験データと対応させてみる。Brown & Roshko²⁾ によれば、成長速度は $0.18 \Delta U$ であり、上記の結果より2割低い。Fiedler & Thies³⁾ によれば、 $0.22 \Delta U$ (tripped case) あるいは、 $0.15 \Delta U$ (untripped case) である。

1) R. Takaki & L.S.G. Kovasznay: to appear in *Phys. Fluids* (1978).

2) G. Brown & A. Roshko: *J. Fluid Mech.* **64** (1974) 775.

3) H. Fiedler & H.J. Thies: pre-print, *Symposium in Berlin* (1977).