

周期性をもつ基本流の線形安定性について

名大 工 応用物理 藤部文男
桑原真二

1. 序

流れに垂直な平面内に平行に置かれた平板列、または平行円柱列などの周期性をもつ境界の直後の伴流は同じ周期性をもつが、さらに後方ではその周期より長い周期をもつ流れがあると思われることがある。(Fig. 1) これを平行平板等の直後の速度分布をもつ流れの不安定を考へ、Orr-Sommerfeld 方程式を用いて解析する。

岐阜大学の松井教授等による実験では、基本流の最大値 U_0 、平行円柱列、あるいは平行円柱列の周期 λ 、動粘性率 ν による Reynolds 数 $Re = U_0 \lambda / \nu$ が $2000 \sim 3000$ 以下で存在する。この際、平行板、あるいは円

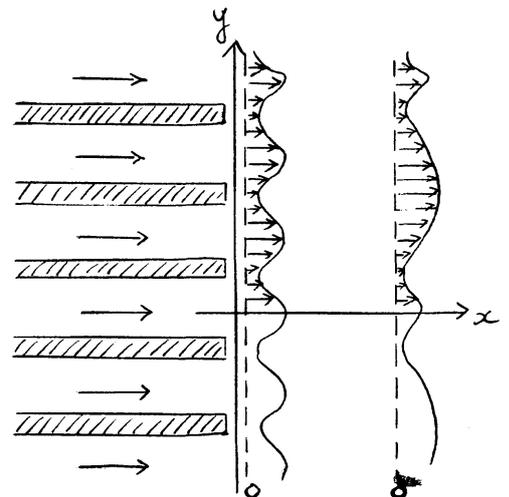


Fig. 1 流れの概略図 速度の x 成分 (基本流の方向) を示す

柱の数は $20 \sim 42$ であり、平行板の厚さ、あるいは円柱の直径を d とし、 k/d を変化させ、 \sqrt{d} が小さいほど、大まな周期の速度分布がえられる。

2. 問題の定式化

平行な平板列等をすばい板と見做し、これを κ は平行流と見做し、2次元流がなされる、これに微小擾乱が加えられるとして Orr-Sommerfeld 方程式を用いる：

$$L\phi = CM\phi \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} L &= -\frac{1}{ikR} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 + U(y) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - U''(y) \\ M &= \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

R はレイノルズ数、 L, M は演算子、 C : 固有値 (複素数)

ψ : 流線関数 $= \phi(y) e^{ik(x-ct)}$ である。

主流は平行流 : $\vec{U} = (U(y), 0, 0)$ であり y 方向に 2 の周期をもつ。すなわち x 平面に対して対称である：

$$U(y) = U(y+2), \quad U(y) = U(-y) \quad (2.3)$$

したがって Orr-Sommerfeld 方程式は係数が同一周期をもつ、4階の線形同次常微分方程式となる。

係数が連続で、同一の周期をもつ n 階の線形同次常微分方程式は一次独立な n 個の解を次の形にとることができる。

Floquet の定理)

$e^{i\mu\pi y} \times$ (係数と同周期の関数 \times 係数 $e^{i\mu\pi y}$ の逆関数)

をもち、次の形の解が少なくとも1つ存在する。

$e^{i\mu\pi y} \times$ (係数と同周期の関数)

Orr-Sommerfeld 方程式のこの形の解のうち、 $y \rightarrow \pm\infty$ まで

ϕ : 有限 y での物理的に意味のある解は

$$\phi = e^{i\mu\pi y} F(y) \quad F(y) = F(y+2), \quad \mu: \text{実数} \quad (2.4)$$

の形のものをとる。 μ : 実数 とおくことにより、境界条件のかわりにするものがとれる。この場合は $0 \leq \mu \leq 1$ の範囲でのみ考えればよい。また、 L, M は次のような性質がある。

$$L(-y) = L(y), \quad M(-y) = M(y) \quad (2.5)$$

したがって、 $\phi(y)$ が固有値 c を持つ解のとき、 $y \rightarrow -y$ としてこの性質を持ち、 $\phi(-y)$ も同じ固有値を持つ解となり、

$$\begin{aligned} \phi(-y) &= e^{-i\mu\pi y} F(-y) = e^{i(1-\mu)\pi y} [e^{-i\mu\pi y} F(-y)] \\ &= e^{i\mu'\pi y} G(y) \quad (G(y) = G(y+2)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

とがけるので、 μ について $0 \leq \mu \leq 1/2$ まで考えればよい。ここで μ の各々の値 μ に対し、 ϕ の基本周期 S は次のように対応する。すなわち

$$\begin{array}{ll} \mu = 0/1 & S = 2 \\ \mu = 1/2 & S = 4 \\ \mu = 1/3 & S = 6 \\ \mu = 1/4 & S = 8 \end{array}$$

$$\mu = 1/5 \quad S = 10 \quad \mu = 2/5 \quad S = 10$$

⋮

$c = 2''$

$$L\phi = L(e^{i\mu\pi y} F(y)) = e^{i\mu\pi y} L'_\mu F(y)$$

$$M\phi = M(e^{i\mu\pi y} F(y)) = e^{i\mu\pi y} M'_\mu F(y)$$

と仮定する. Orr-Sommerfeld 方程式は

$$L'_\mu F = CM'_\mu F \quad (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} L'_\mu &= -\frac{1}{i\rho R} \left(\left(\frac{d}{dy} + i\mu\pi \right)^2 - k^2 \right)^2 + U(y) \left(\frac{d}{dy} + i\mu\pi \right)^2 - k^2 - U'(y) \\ M'_\mu &= \left(\frac{d}{dy} + i\mu\pi \right)^2 - k^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

と仮定.

U, F は Fourier 級数で展開できると仮定する.

$$\left. \begin{aligned} F(y) &= \sum_n a_n U_n \quad (U_n = e^{i\mu\pi y} / \sqrt{2}, (U_n, U_m) = \delta_{nm}) \\ U(y) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum V_n U_n \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

(2.7) は U_n を基底として $0 \leq x \leq 2$ の積分を行なう (Galerkin の方法)

$$\sum_n a_n L'_{mn} = c \sum_n a_n M'_{mn} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} L'_{mn} &= (U_m, L' U_n), \quad M'_{mn} = (U_m, M' U_n) \\ (f, g) &= \int_0^2 f^*(y) g(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

と仮定. 行列の形式:

$$L'_{mn} = (L)_{mn}, \quad M'_{mn} = (M)_{mn}, \quad a_n = (a)_n$$

と仮定して (2.10) は次の形式で表される.

$$(L - cM) a = 0 \quad (2.12)$$

Mの逆行列を左から求めて

$$(M^{-1}U - c) a = 0 \tag{2.13}$$

$$\left. \begin{aligned} (M^{-1}U)_{lm} = \beta_{lm} &= \frac{1}{i\kappa R} [(\ell+\mu)^2 \pi^2 + k^2] \delta_{lm} \\ &+ \frac{1}{2} V_{\ell-m} \frac{[(\mu+\ell)(2\mu+\ell)\pi^2 + k^2]}{[(\mu+\ell)^2 \pi^2 + k^2]} \\ \beta_{\ell\ell} &= \frac{1}{i\kappa R} [(\ell+\mu)^2 \pi^2 + k^2] + \frac{1}{2} V_0 \\ \beta_{\ell m} (\ell \neq m) &= \frac{1}{2} V_{\ell-m} \frac{[(\mu+\ell)(2\mu+\ell)\pi^2 + k^2]}{[(\mu+\ell)^2 \pi^2 + k^2]} \end{aligned} \right\} \tag{2.14}$$

このUはx依存性が小さいとした。まず一般に平行にUの自由流Vのx依存性を議論する。速度Uがx=0で図のように階段関数的に0からUまで変化していき、このとき運動方程式のx成分は近似的に次のようにおける。

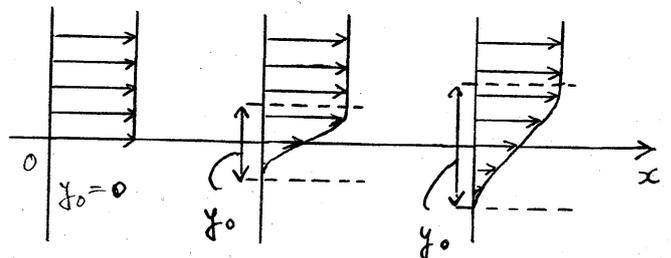
$$\sigma_0 \frac{\partial U}{\partial x} = v \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

これは拡散方程式でこれを解いた。y=0付近のUのx依存性の領域の中y_0は以下で評価される。

$$y_0 \propto (v x / \sigma_0)^{1/2}$$

Fig. 2 Uのx依存性の例

したがって、このy方向の基本波の周期をdとしたとき、次の式が満たされる範囲で、x依存性が小さいとみなしてよい。すなわち



$$1 \gg y_0/d \propto (v/d \sigma_0)^{1/2} \cdot (x/d)^{1/2} = [(v/R) \cdot (x/d)]^{1/2}$$

Navier Stokes 方程式とは Poiseuille 流のように壁に拘束された流れの場合、その境界条件は壁で $u = 0$ であり、2次元の場合、流れの関数に対しては $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0$ となる。Orr-Sommerfeld 方程式とはこれに対応し、壁で $\psi = d\psi/dy = 0$ となる。あるいは3次元で関数の値が0という条件は Schrödinger 方程式とは無限の高さの potential の壁における波動関数の条件 $\Psi = 0$ に対応させることが出来る。また、伴流、境界層における無限遠での擾乱関数に対する条件としては、擾乱の速度 = 0 から、無限遠で $\psi = d\psi/dy = 0$ となる。これは Schrödinger 方程式とは束縛された粒子の波動関数が無限遠では $\Psi = 0$ となることに対応する。

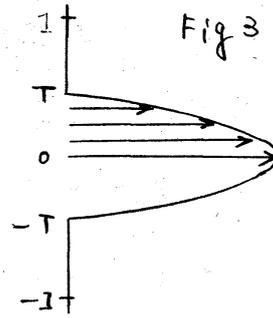
ここで考えた周期的な基本流に対する擾乱の関数は $\psi = e^{i\mu y} F(y)$ の形と表わされ、これは格子の中の周期的な potential の中で振動する粒子の波動関数が Bloch の定理、あるいは Floquet の定理により、 $\Psi = e^{ik\pi x} F(x)$ ($F(x) = F(x+\pi)$) と書かれることに対応する。

4. 計算方法

- 主流 $U > 0$

計算は Model として次直のような厚みの速度分布に対してお

に存在し、周期 $2l$ の壁が動かされて
 いるとき、その壁のすきまを $2T$ と
 し、速度分布は平行板の内部では
 Poiseuille 流であるので、壁から出る
 とき、しだいに同じ型をしる



と仮定した。 T は $0.25, 0.5, 0.75$ と変化させ、 l に対し、流量
 は 1 に正規化してある。すなわち U_0 の定義として、

$$U_0 = \int_{-l}^l U(y) dy / l$$

ここで $2l$ は基本流の周期。この U_0 から Reynolds 数 R は

$$R = U_0 l / \nu = 1/\nu \int_{-l}^l U(y) dy$$

・固有値; 固有関数 $F > 11$ 2

F の展開で $F = \sum_{m=-N}^N a_m u_m$ とし近似をみると、問題は B_{em} ($-N \leq e, m \leq N$) の固有値問題に帰着する、 a_m はその
 固有 Vector に存在。この行列 B_{em} の固有値、固有 Vector を数
 値的に計算し、その際 $B_{em} F$ は U_m が $-2N \leq n \leq 2N$ の範
 囲に含まれる。

5. 計算結果

・中立曲線 $F > 11$ 2

各々の形の基本流 $F > 11$ 2 の $\mu = 0/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 2/5$

$F > 112$ の中立曲線は別表のとおりである。

こゝで行つた計算とは、試み F 基本流の形すべし $F > 112$ $\mu = 0/1$ 、すなわち基本流と同周期の擾乱が最小の臨界 Reynolds 数を与える。このときの中立曲線は $\mu = 0/1$ より他の μ の場合とは大きくこゝ存 F 形をしており、二次元の Jet 伴流 F に対する中立曲線と類似し F 、すなわち Reynolds 数の依存性をしめしてゐる。なお、この中立曲線をえがくための計算は $N = 20$ で行つた。

・固有関数 $F > 112$

Poiseuille 流型で $T = 0.75$, $R = 30$, $h = 1.0$ のとき、 $\mu = 0/1$, $1/2$, $1/3$ 、 $F > 112$ 固有関数が計算された。この T , R , h の値のとき、 $\mu = 0/1$ 、 $F > 112$ は 1 つの固有値が不安定を与え、他の固有値は安定性を与える。 $\mu = 1/2$, $1/3$ では中立曲線の近くで安定である。固有値の虚数部の大きき順に $M = 1, 2, \dots$ とし F とし、 $M = 1 \sim 5$ $F > 112$ の固有関数は別表のとおりである。この計算は $N = 71$ とし、倍精度で行つた。 $F = e^{i\mu y} \phi(y)$ F は 112 絶対値の最大値をとる $y = 3$ での値が 1 とするよう F を正規化したのである。

こゝで計算された範囲では安定なもののほど振動が少くなる値向がみられる。また高次の固有関数はその Fourier 係数を比較すると、 $(2m+1)$, $(2m+1)$ 番目の固有関数 ($m = 0, 1, 2, \dots$)

は $U_{\pm m}$ が最も大きくなる。また $F(\gamma) > 0$ となるのは、
反材料の値にその固有値が属する。

6. 結論

以上の Orr-Sommerfeld 方程式を用いた計算結果は、基本
波と同周期をもつ流れが全体の流れの中で最も不安定であ
ることが示された。そしてこの流れは臨界 Reynolds 数は突
破が行なわれた後より $100 \sim 1000$ の order の Reynolds 数に
なり、およそ $1 \sim 10$ の order であり、2 ケタ値が変化する。
この実験が行なわれた Reynolds 数は 10^5 以上で調べたときの
周期が不安定になる。実験が行なわれた状態を説明す
るには、このすべての周期の擾乱が微小の擾乱から有限の振
幅になるのち、有限振幅の非線形相互作用による影響を
調べなければならぬであろうと考えることができる。あ
るいはこのすべての流れの線形安定性の理論は存
在。また別の Approach が必要であろう。

Poiseuille 流型の流れのとき、壁のあつと可きまを交代させ
るとき、流量一定を考えると、一般に壁のあつと可きまに
対して大きいときほど不安定になりやすいことが、計算上
すべての周期の擾乱に適用される。

固有関数に関しては、計算を(1)関数の数が少ないため、
 確定的なものと見做すことができる。一般に(1)のよう
 なことが言える。すなわち、不安定な擾乱の固有関数ほど振動が少
 なく、安定な擾乱の絶対値が大きくなるほど、振動の数が大
 きくなる。これは振動の数が大きくなるほど、粘性に
 よって減衰されるからである。またこのことから不安定な
 ことである。逆にこのことから Fourier 級数の上位の N 項ま
 での近似の収束がよく、 N を小さくすると、ある
 程度の精度で、固有値、固有関数を与えることの説明にも
 なるであろう。

付記

• $V(y)$ の Fourier 級数展開 $F > 1$ である

Fourier 級数展開を基本流 $V(y)$ に適用することを考えると、
 Orr-Sommerfeld 方程式は $V(y)$ の 2 階微分が現われ、し
 ゃも上で考えた Model に用いると、 $V(y)$ の 2 階微分は delta 関
 数的な特異性が現われるので、 $V(y)$ の 2 階微分の Fourier
 展開は大きな振動をもたらし、そのまま振動を計算は Fourier
 級数を用いて行われるので、この V の 2 階微分の振動の影響
 を考えなければならぬ。

二、 $V(y)$ をその N 次の近似内の Feyn の総和法によるもの
 である。そのときの固有値、固有関数の変化を調べ、(別表参照)
 $V(y)$ を Feyn の総和法によるものとする。その二階微分は
 基本流の二階微分と特異点以外で一致。あるいは関係は変
 化を、特異点のまわりでも有限の値をとり、十分小さく
 なる。しかも Feyn の総和法を $V(y)$ の近似に用いると
 は、 $N \rightarrow \infty$ の一様収束を仮定する。上記の表から明らかな
 り Fourier 級数展開による N 次固有値、固有関数は近似
 の精度 N にあまり依存せず、非常によい収束を示している。Feyn
 の総和法による計算は $N \rightarrow \infty$ にした方が Fourier 級数によ
 る N 次固有値、固有関数に十分近づくといえる。したが
 り Fourier 級数による $V(y)$ の二階微分の振
 動の影響は小さいと考へた。したがって Fourier 級数展開による
 近似では、精度をそれほど大きくする必要はないと考へた。

・高次の固有値について

M: 小 a ときの固有値の R 依存性。R 依存性も基本流
 の形による依存性は予想どき存したが、高次の固有値はその
 ような考察から近似的に得るべきである。

中は級数展開による最初の N 項による近似である。この近似は高次の mode がすぐ他の mode と分離している
 ときのみ、正しい。もし高次の mode が分離しないならば、

高次の固有値に対する近似表現を得ることが出来る。もし \$n\$ 番目の mode が分離してあれば行列の対角成分のみが \$a_n\$ に対する方程式 \$F\$ のみになる。すなわち

$$(B_{nn} - c) a_n = 0$$

これは十分大きな \$l\$ に対して

$$B_{ll} \simeq l^2 \pi^2 / i k R$$

$$B_{lm} \ (l \neq m) \simeq \frac{1}{2} U_{l-m} \frac{2^{m-l}}{l} = U_{l-m} \left(\frac{m}{l} - \frac{1}{2} \right)$$

よ

$$\begin{aligned} |B_{lm} / B_{ll}| &\simeq U_{l-m} \left(\frac{m}{l} - \frac{1}{2} \right) / l^2 \pi^2 / k R \\ &\simeq k R U_{l-m} m / l^3 \end{aligned}$$

よあるが、十分 \$l\$ が大きければ、対角成分のみをのみ考慮すればよいことが示される。このことから、\$2M\$, \$(2M+1)\$ 番目の固有値は \$M\$ が十分大きければ、

$$C_{\substack{2M \\ 2M+1}} \simeq \beta_{\substack{-M-M \\ (M,M)}} = \frac{1}{2} U_0 + \frac{1}{i k R} \left[\binom{-M+M}{(M)} \pi^2 + h^2 \right]$$

と表わされる。(固有値の Graph 参照) またこの式が、明らかである。この \$C_n\$ の近似は基本流の Fourier 係数としては \$U_0\$ がよすぎず、流量の正規化により、\$U_0 = 1\$ ととらえておけば、高次の固有値は主流の速度分布によらずに示すことが出来る。これは計算結果からよく知られている。

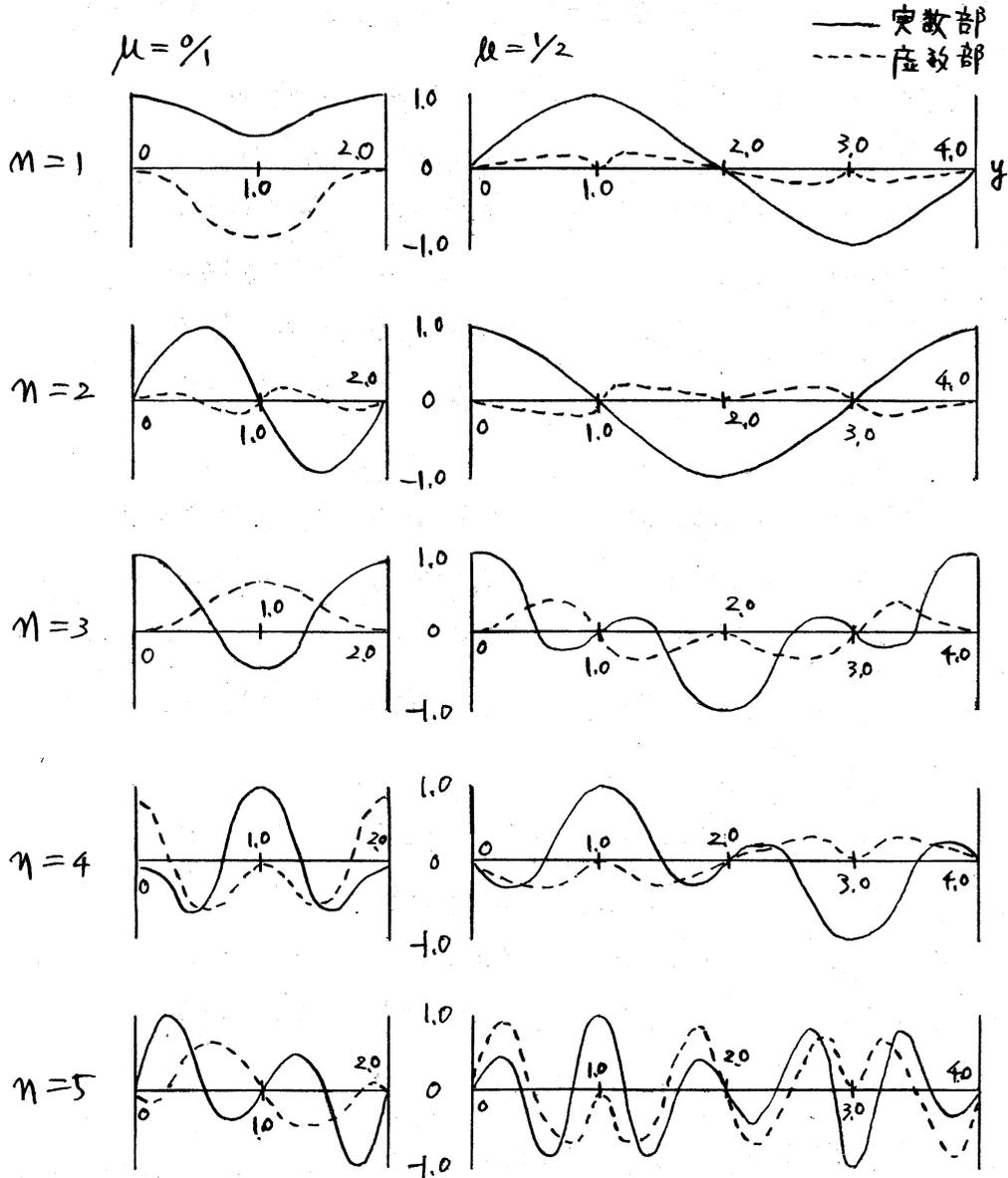
基本流の Fourier 級数展開と Fejer の総和法による得られた固有値の比較. (Poisson 流型, $T=0.75$, $R=30$, $k=1.0$, $\mu=1/3$)

Fourier 級数			Fejer の総和法	
	実数部	虚数部	実数部	虚数部
$N=15$				
$m=1$	0.90254	-0.02808	0.89110	-0.032805
2	0.07661	-0.05903	0.08982	-0.06140
3	0.52197	-0.76782	0.51884	-0.76078
4	0.50423	-1.02777	0.50487	-1.02108
$N=25$				
$m=1$	0.90254	-0.02808	0.89559	-0.030956
2	0.07661	-0.05903	0.08464	-0.06047
3	0.52197	-0.76782	0.5200	-0.76354
4	0.50423	-1.02776	0.50464	-1.02363
$N=35$				
$m=1$	0.90254	-0.02808	0.89755	-0.03015
2	0.07661	-0.05903	0.08238	-0.06006
3	0.52197	-0.76782	0.52056	-0.76424
4	0.50423	-1.02777	0.50454	-1.02477

計算した固有関数のうち Poisson 流型で $T=0.75$, $R=30$, $k=1.0$ のとき $\mu=0/1, 1/2$ に対する固有関数を Graph にしました. 以下、固有値の虚数部の大きい順に $m=1, 2, \dots$ とし, $m=1 \sim 5$ をしました. 近似度 $N=35$ で計算を行いました.

Fig. 4

固有関数 (Poiseuille 流型 $T=0.75$ $R_e=30$ $k=1.0$ $\mu=0/1, 1/2$)



次に固有値 c の Reynolds 数による変化と高次の固有値の n 依存性を示す。Reynolds 数による変化のときは $N=20$, 高次の固有値の n 依存性のときは $N=35$ で計算を行った。

Fig. 5

固有値 $c (=C_r + iC_i)$ の Reynolds 数 Re に対する変化の例
 (Poiseuille 流型 $T=0.75$ $\mu=1/3$ $k=1.5$)

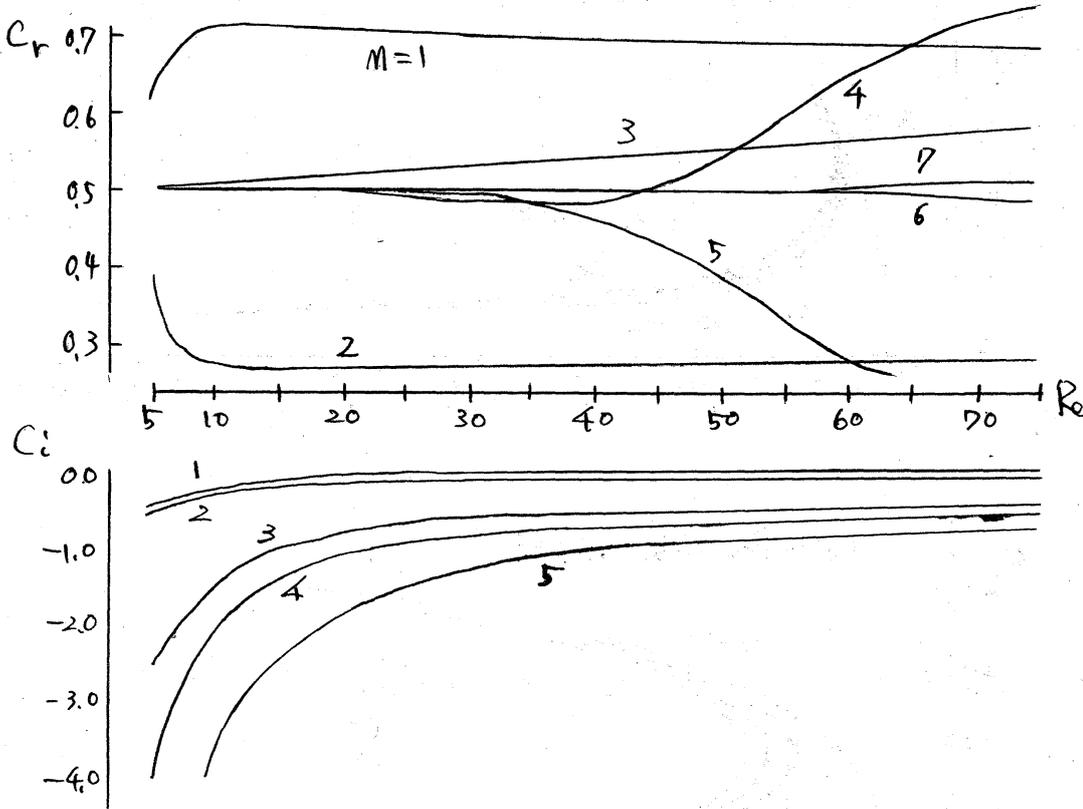


Fig. 6

高次の固有値 $c (=C_r + iC_i)$ の変化の例
 (Poiseuille 流型 $T=0.75$ $\mu=1/3$ $k=1.0$ $Re=30$)

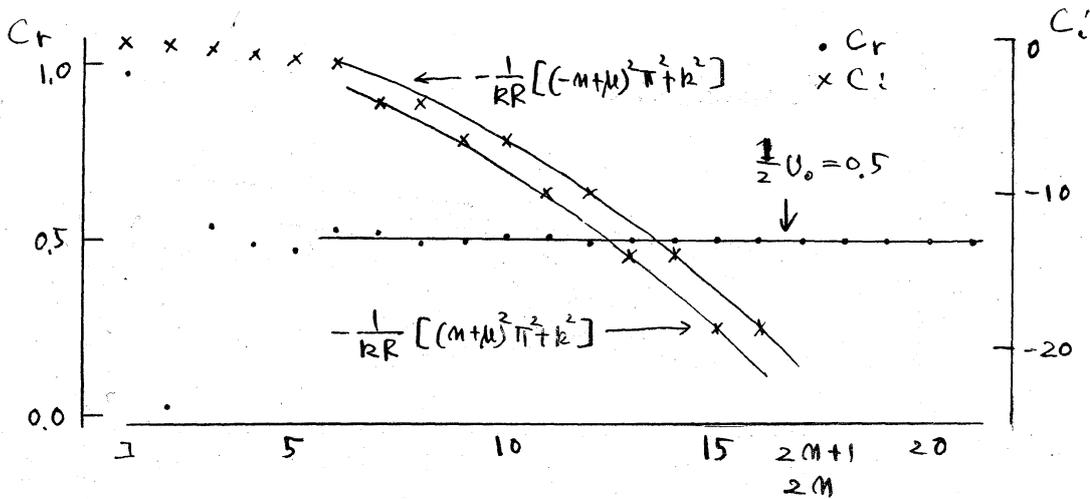
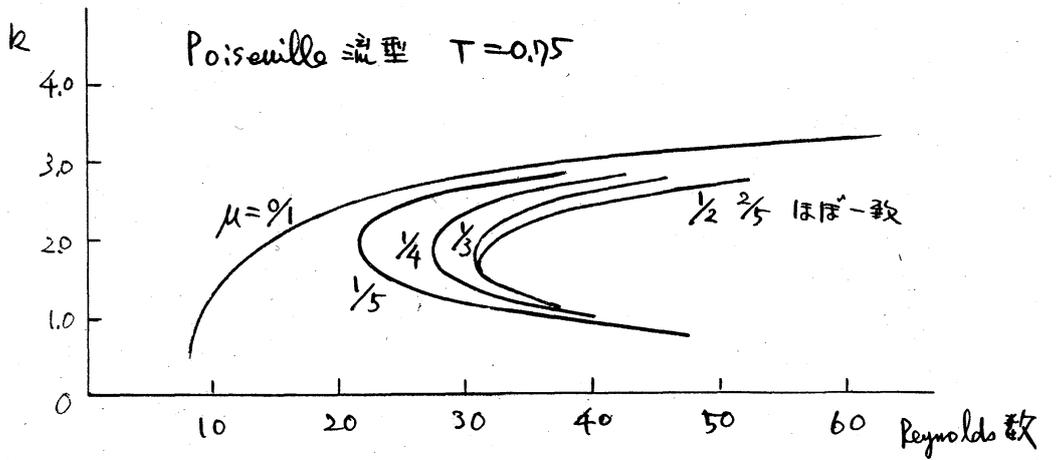
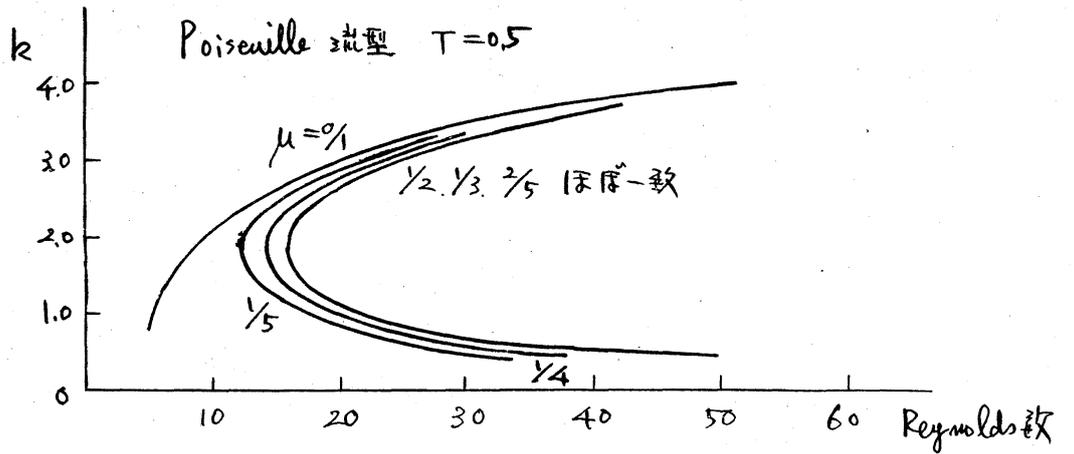
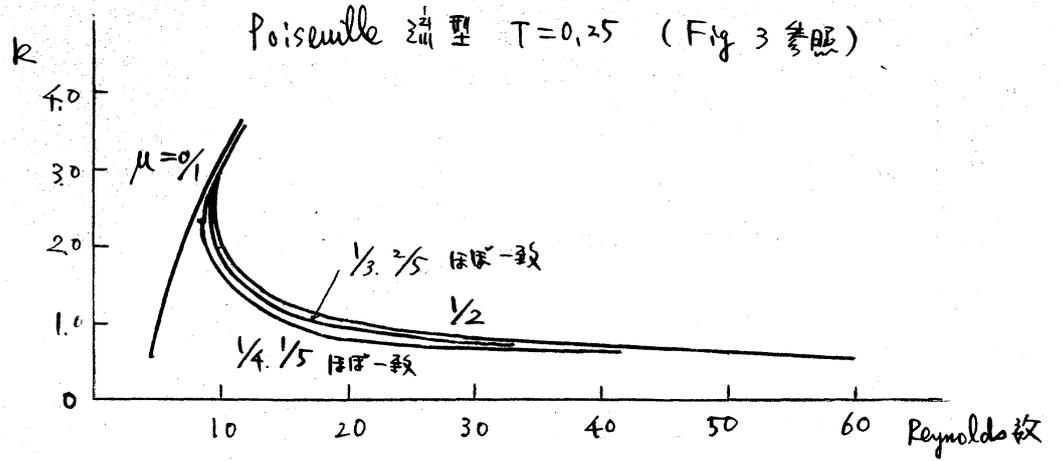


Fig. 7 中立曲線



参考文献

C. C. Lin : The theory of Hydrodynamic stability
(Cambridge University Press)

F. A. Coddington, N. Levinson :
Theory of Ordinary Differential Equations
(McGraw-Hill)

C. Grosch, H. Salven :
J. Fluid Mech. Vol 34 Part 1, 197 (1968)

T. Matsui : 1975 Joint JSME-ASME Applied Mechanics
Western Conference 415