数理解析研究所講究録
326巻 1978年 132-149

層流の二次不安定機構

航技研　伊藤信毅

1. 序

境界層における層流から乱流への遷移は比較的周波数の低い二次元波動，いわゆるTollmien-Schlichting波動の発生で始まる。この波動は下流に進むにつれて増幅され，それと同時に流れに直角なスパン方向にほゞ周期的に変化する三次元波動に変形される。三次元変形を受けた波動は二次元波のときより大きな増幅率で成長し，その振幅がある程度の大きさに達すると，はじめの波動に比べて周波数の一段高い波動が局所的に発生する。局所的高周波波動は下流に流されるにつれてさらに周波数の高い波動に分裂を繰返し，短時間のうちに乱流スポットを形成する。以上の遷移過程はKlebanoff等[1]の実験で明らかにされたものである(Tani[2]の概説参照)。このうち，二次元波の発生と成長については線型および非線型安定理論[3-5]によって理論的説明が与えられる。また，二次元波から三次元

波への移行についても筆者の最近の研究[6]によってかなりの部分が理論的に解明された。これに対して，局所的高周波波動の発生機構についてはまだ十分満足のいく理論が得られていない。本研究の目的は高周波攪乱の発生を理論的に記述し，その特性を調べることである。

Tollmien-Schlichting波が層流の第一次的な不安定の結果として発生するものであるのに対し，高周波波動の発生は境界層の速度分布が低周波波動によって瞬間的局所的に不安定な形に歪められるために生じる二次的な不安定現象であると推測されている。このような観点から進められた二次不安定の理論の中で最も注目されるものはLandahl[7]の研究である。彼は低周波波動の上に微小な高周波攪乱を重ね合せ，Whitham[8]の運動学的波動理論を適用して高周波攪乱の増幅条件を導びいた。しかし，本来非散逸系の波動を対象とするWhithamの理論を散逸系の二次不安定問題に直接適用しようとしたため，Landahlは散逸を十分小さいものと仮定する近似的解法を用いた。その近似法が不十分であることはStewartson[9]によって指摘された。

本研究ではLandahlの方法を厳密化するために，Whithamの理論を散逸系問題にも適用できるように拡張し，それを用いて層流の二次不安定条件を明らかにする。

2. 支配方程式

境界層流れに比べて理論的取扱いの簡単な平行平板間の二次元流れを考える。平板間の中心線に沿って主流方向にx軸，平板に垂直な方向にy軸，対応する速度成分をu, vとする。流れ函数Ψを用いて二次元の運動方程式を書くと，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{R}\Delta\right)\Delta\Psi = 0 \tag{2.1}$$

ただし $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$，すべての量は平板間の半幅$h$と流れが定常層流であるときの最大流速$U_0$で無次元化されている。また，$R = U_0 h/\nu$ は Reynolds数（ν：動粘性係数）。

(2.1) の定常層流解は Poiseuille流で，その流れ函数はyだけに依存する。一方，Tollmien-Schlichting型低周波波動は線型および非線型の層流安定理論から定まり，α，c_r，θ を波数，位相速度，位相定数とするとき，その流れ函数は $\alpha(x - c_r t) + \theta$ の周期函数になる。ただし，波の振幅Aはtとともにゆっくり変化するものであってもよい。すなわち，波の対数増幅率をαc_iとするとき，$|c_i|$がαに比べて十分小さい場合を考える。定常層流と低周波波動を重ね合せた基本流を考え，その流れ函数を $\Psi_0(y, \alpha x - \alpha c_r t + \theta, A)$ と書き，その上に重ねられる高周波攪乱の流れ函数を $\psi(x, y, t)$ とする。$\Psi = \Psi_0 + \psi$ を (2.1) に代入し，Ψ_0自身が (2.1) の解であることおよび攪乱が微小であることに注意すると，つぎの線型攪乱方程式が得られる。

$$\left\{\left(\frac{1}{R}\Delta-\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial\Psi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Delta-\frac{\partial\Delta\Psi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial\Delta\Psi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right\}\psi=0 \qquad (2.2)$$

ψに対する境界条件は$y=\pm1$で攪乱速度が0になることであるが，ここでは層流安定理論でしばしば行われるように，x軸に関して反対称な攪乱だけを考え，つぎのように与える。

$$y=0\text{で}\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=0, \qquad y=1\text{で}\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \qquad (2.3)$$

攪乱方程式の解として，波数と振動数がそれぞれαとαc_rに比べて十分大きい値を持つ波動を考える。いま，低周波波動の位相速度c_rで動く座標を導入し

$$\xi=\alpha(x-c_r t)+\theta, \qquad \tau=\alpha t \qquad (2.4)$$

とおくと，この問題はξ方向にゆるやかに変化する媒体中を伝播する波動の問題とみなせる。αは媒体の変化のゆるやかさを示めす尺度である。そこでWhitham[10]の運動学的波動理論にしたがって解をつぎの形におく。

$$\psi=\exp\left\{\frac{i}{\alpha}\Theta(\xi,\tau)\right\}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n A_n(\xi,\tau)\,\phi_n(y,\xi,\tau) \qquad (2.5)$$

ただし，ϕ_nはつぎのように正規化されているものとする。

$$\phi_n(0,\xi,\tau)=1 \qquad (n=0,1,2,\cdots) \qquad (2.6)$$

攪乱の波数と振動数は

$$k(\xi,\tau)=\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}, \qquad \omega(\xi,\tau)=-\frac{\partial\Theta}{\partial\tau} \qquad (2.7)$$

で定義され，これらの間にはつぎの関係が成り立つ。

$$\frac{\partial k}{\partial\tau}+\frac{\partial\omega}{\partial\xi}=0 \qquad (2.8)$$

(2.5)で表わされる攪乱は，短かい尺度の座標系(x,t)から見る

ときには，局所的にはゞ一定の波数，振動数および振幅を持つ波であるが，それらは長い尺度の座標(ξ,τ)とともに変化し，全体としてはある波数分布を持つ波束を表わしている。現実の流れに現われる微小攪乱もやはり局所的波束とみなせるから，(2.5)の表現は現実的なものと思われる。

(2.5)を(2.2)に代入し，αの各べきの係数を0に等しいと置くと，無限個の方程式系が得られる。このうち最低次の係数から定まる方程式はいわゆるOrr-Sommerfeld方程式になる。

$$\left[\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)+i(\omega+kC_r)-ik\frac{\partial\Psi_0}{\partial y}\right\}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-k^2\right)+ik\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial y^3}\right]\phi_0=0 \qquad (2.9)$$

これはyに関する同次型常微分方程式であり，同次型境界条件(2.3)とともに，ωをk，ξ，A，Rの函数として定める固有値問題を形成する。いま，AとRをパラメタに見なせば，この問題を解いて得られる関係

$$\omega = W(k,\xi) \qquad (2.10)$$

はξ方向にゆっくり変化する媒体中を伝播する波の分散関係式と考えられる。したがって，これを(2.8)に代入すれば，波数kの振舞を支配する非線型方程式が定まる。

$$\frac{\partial k}{\partial\tau}+C(k,\xi)\frac{\partial k}{\partial\xi}=\Omega(k,\xi) \qquad (2.11)$$

ここで，CとΩはつぎのように定義された函数である。

$$C(k,\xi)=\frac{\partial W}{\partial k}, \qquad \Omega(k,\xi)=-\frac{\partial W}{\partial\xi} \qquad (2.12)$$

もしWが実数値だけを取る函数ならば，すなわち，もし柔

が散逸を持たないならば，(2.11)は群速度Cで伝わる通常の波束を表わし，kは実数の範囲だけで取扱われてよい。ところが，(2.9)の固有値ωは一般に複素数値を取るため，函数W，C，Ωもすべて複素数になり，方程式(2.11)をみたすkの実数解が一般には存在しないことになる。Landahl[7]はWの虚部が十分小さいという仮定に基づいてCとΩの虚部を無視し，(2.11)の実数解を導びいた。しかし，たとえWの虚部が小さくてもCとΩの虚部が十分小さいとは言えない(文献9参照)。一方，kを複素数としてもξを実数の範囲で考えると，(2.11)は楕円型偏微分方程式となり，我々の希望する初期値問題に適合する解が得られない。

以上の難点を克服するため，kを複素数にすると同時に，

$$\zeta = \xi + i\eta \tag{2.13}$$

で定義される複素座標を導入し，(2.11)を拡張した方程式

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + C(k,\zeta)\frac{\partial k}{\partial \zeta} = \Omega(k,\zeta) \tag{2.14}$$

を解く。$C(k,\zeta)$と$\Omega(k,\zeta)$は(2.12)においてξをζで置き換えたものである。上式は双曲型方程式なので特性曲線法を利用できる。実の座標ξを複素座標ζの一部分と見なし，(2.14)の解$k(\tau,\zeta)$が得られたら，そのうち$\eta=0$における値だけが我々の目に見える物理現象を表わしていると考える。そのため，まず複素座標ζでの解の一般的性質を調べる必要がある。

3. 特異点近傍における解の性質

方程式(2.15)は，特性曲線に沿う微分を考えることによって等価な連立常微分方程式に置き換えられる。

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = C(k,\zeta), \qquad \frac{dk}{d\tau} = \Omega(k,\zeta) \tag{3.1}$$

この系の一般解は4次元空間(k_r, k_i, ξ, η)における曲線群で表わされる。解曲線群の形状は，特異点，すなわち

$$C(k,\zeta) = 0, \qquad \Omega(k,\zeta) = 0 \tag{3.2}$$

をみたす点の位置とその性質に強く支配される。以下では，一つの特異点が存在するものとし，その近傍における解曲線の形状を調べる。

特異点をO点と名付け，その座標を(k_0, ζ_0)とする。ただし$k_0 = k_{0r} + ik_{0i}$，$\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$。O点に座標原点を移す変換

$$k = k_0 + k', \qquad \zeta = \zeta_0 + \zeta' \tag{3.3}$$

を行ない，CとΩをO点のまわりに展開すると，(3.1)は

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\zeta'}{d\tau} &= C_k(k_0,\zeta_0)k' + C_\zeta(k_0,\zeta_0)\zeta' + O(k'^2, k'\zeta', \zeta'^2) \\ \frac{dk'}{d\tau} &= -C_\zeta(k_0,\zeta_0)k' + \Omega_\zeta(k_0,\zeta_0)\zeta' + O(k'^2, k'\zeta', \zeta'^2) \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

と変形される。添字k, ζは偏微分を表わす。k'とζ'の2次微小項を省略し，さらにO点まわりに座標軸を回転する変換

$$\zeta_1 = \{C_\zeta(k_0,\zeta_0) - \sigma\}\zeta' + C_k(k_0,\zeta_0)k' \tag{3.5a}$$

$$k_1 = \Omega_\zeta(k_0,\zeta_0)\zeta' - \{C_\zeta(k_0,\zeta_0) - \sigma\}k' \tag{3.5b}$$

を行うと，(3.4)はつぎのように簡単化される。

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = -\sigma\zeta_1, \qquad \frac{dk_1}{d\tau} = \sigma k_1 \tag{3.6}$$

ただし，σ は $\sigma^2 = \{C_\zeta(k_0,\zeta_0)\}^2 + C_k(k_0,\zeta_0)\,\Omega_\zeta(k_0,\zeta_0)$，$\mathrm{Re}\,\sigma \geqq 0$ で定義される。(3.6) の解は，B_1, B_2 を任意な複素定数として

$$\zeta_1 = B_1 e^{-\sigma\tau}, \qquad k_1 = B_2 e^{\sigma\tau} \tag{3.7}$$

で与えられる。σ が正の実部 σ_r を持つから，ζ_1 は時间とともに振動しながら 0 に収束し，k_1 は振動しながら発散する。振幅 $|\zeta_1|$ と $|k_1|$ の関係は図1のような双曲線群で表わされ，0 点が鞍部点型の平衡点であることが判る。一つの双曲線上を動く点の速度は，曲線に沿う長さを s としたとき，

$$\frac{ds}{d\tau} = \left\{\left(\frac{d|\zeta_1|}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d|k_1|}{d\tau}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_r\left(|\zeta_1|^2 + |k_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

で与えられるから，0 点からの距離に比例して速度は大きくなることがわかる。

いま，$|\zeta_1|$ 軸の近傍のある点から出発する解を考えると，それは $|\zeta_1|$ 軸に沿って速度を徐々にゆるめながら 0 点方向に進み，ゆっくりと 0 点のわきを通過した後，再び速度を増しながら $|k_1|$ 軸に沿って無限遠方に発散する。0 点のより近傍を通過する解はより長い時间その近傍にとどまることになるから，もし攪乱が 0 点近傍で時间的に増幅される性質があるときには，攪乱は長時间の増幅を受けて極度に成長する。このような状態は非常に強い不安定現象であるとみなせる。特性曲線に沿っての攪乱の時间的増幅率は

$$-\mathrm{Im}\left(\frac{d\Theta}{d\tau}\right)=-\mathrm{Im}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+C\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta}\right)=\mathrm{Im}\{W(k,\zeta)-kC(k,\zeta)\} \tag{3.9}$$

で与えられ，とくに０点では$C=0$であることに注意すると，０点近傍での攪乱に対する不安定条件は次式で与えられる。

$$W^{(i)}(k_0,\zeta_0)>0 \tag{3.10}$$

ここで，上添字(i)は虚数部を表わす。

4. 二次不安定条件

前節で得られた特異点近傍での不安定現象は層流の二次不安定と密接に関係しているように思われる。しかし，０点が一般には複素座標空間ζ内に存在するので，そこで生じた不安定がそのまゝ実空間(物理空間)での二次不安定を引き起こすとはかぎらない。我々が見ることのできる攪乱は４次元空間(k_r, k_i, ξ, η)内の解曲線が平面$\eta=0$と交わる点に対応する状態だけであって，それ以外の点に対応する状態は我々の目に触れることのない虚空間中での攪乱の振舞いを表わすにすぎない。そこで複素空間内での不安定現象が実空間内での二次不安定現象とどのように結びつくかを調べる。

攪乱方程式(2.2)は実数パラメタRとAを含むから，０点の座標k_0，ζ_0および増幅率$W^{(i)}$もこれらのパラメタの函数である。したがって，０点で攪乱が増幅も減衰もしない中立条件

$$W^{(i)}\{k_0(R,A),\ \zeta_0(R,A)\ ;\ R,A\}=0 \tag{4.1}$$

は R と A の関係を定める方程式と考えられる。これから (R, A) 座標面における一本の限界振幅曲線

$$A = A_N(R) \tag{4.2}$$

が定まり，O点での攪乱はこの曲線より下方で減衰し，上方で増幅することになる。一方，O点が実空間に現われる条件

$$\zeta_0(R, A) = 0 \tag{4.3}$$

もまた (R, A) 面に一本の曲線を定める。いま，二曲線が図2に示されるように一点Eで交わるものとすれば，この点ではO点が実空間に存在し，かつそこでの攪乱は中立安定の状態にある。曲線(4.3)上の $A > A_N(R)$ をみたす部分では，実空間中に存在するO点の近傍で不安定が生じるから，それはそのまま二次不安定現象と見なされてよい。これに対し，(4.3)上で $A < A_N(R)$ をみたす部分では，O点が実空間に存在するものの，その近傍で攪乱は減衰するため，流れは安定である。

つぎに，O点が実空間にはないが，平面 $\zeta = 0$ の近傍に位置する場合を考える。いま，ある時刻 $\tau = 0$ において実空間，すなわち平面 $\zeta = 0$ 上に微小な攪乱が分布しているものとすれば，対応する複素波数 k を ξ の函数として表わすことができる。(2.11)を(2.14)に拡張したことに対応して，この函数の独立変数 ξ を複素変数 ζ で置き換えたものを考え，これを初期条件とみなす。この拡張によって初期条件は ζ 面全域で定義される

ことになる。各初期値から出発する解曲線のうち，0点の近傍を通過するものはその後$\zeta_1=0$なる二次元多様体に漸近することが(3.7)から示される。したがって，この漸近多様体と平面$\eta=0$の交線をlとするとき，0点の近傍を通り抜けた攪乱は曲線lに近い位置で実空間に姿を現わす。もし，攪乱が0点近傍を通過する際に増幅されてきたならば，そしてその後実空間までの道程でなお引き続き増幅されてきたならば，攪乱は非常に大きな振幅を持ったまゝ実空間に現われることになり，0点での不安定が層流の二次不安定を引き起こすことなる。0点が$\eta=0$の近傍にある場合に，このような事態が生ずるかどうかを調べるには，解曲線が0点に無限に近い道すじを通ったあと実空間に現われる極限の道程，すなわち，漸近多様体$\zeta_1=0$上での攪乱の増幅率を求める。(3.9)に(3.3)を代入し，(3.5a)を0に等しいと置いた式を用いてk'を消去すると，$\zeta_1=0$上での増幅率は次式のように書ける。

$$-\mathrm{Im}\left(\frac{d\Theta}{d\tau}\right) = W^{(i)}(k_0,\zeta_0) - (k_{or}\sigma_i + k_{oi}\sigma_r)\xi' - (k_{or}\sigma_r + k_{oi}\sigma_i)\eta' + O(\xi'^2, \xi'\eta', \eta'^2) \tag{4.4}$$

攪乱が0点から実空間まで動くことに対応してη'は0から$-\eta_0$まで変わる。この範囲のη'に対して上式の右辺を常に正にするようにξ'を選ぶことは可能であるから，0点近傍で増幅された攪乱の中にその後も増幅され続けて実空間に現われる成

分がかならず存在することがわかる。すなわち，ξ_0が小さい場合には0点での不安定条件(3.10)がそのまゝ実空間における二次不安定のための必要かつ十分な条件になっている。

これに対して，ξ_0が大きいときには，たとえ0点近傍で攪乱が増幅されても，それが実空間に到達するまでの長い道程で減衰させられる可能性もあるから，(3.10)は二次不安定の十分条件ではない。しかし，(3.10)が成り立たないときには，0点近傍を通過する攪乱はそこですべて減衰してしまうし，0点から離れた道すじを通る攪乱はたとえ実空間までの道程の途中で増幅されてきても，すべて有限時間内に実空間を横切って虚空間の遠方へ立ち去るから，実空間の流れは最終的に安定である。したがって，(3.10)はξ_0が大きい場合にも，二次不安定のための必要条件にはなっている。

結局，図2の曲線$A = A_N(R)$は一般には層流の二次不安定に必要な振幅を与え，とくにE点の近傍では必要かつ十分な条件を表わしていることになる。

5. 限界振幅の近似計算

中立条件(4.1)から限界振幅$A_N(R)$を求めるには，まず基本流Ψ_0を決定する必要がある。ここでは一つの試みとして，低周波波動が線型安定理論によって近似できるものと仮定し，

$$\left.\begin{aligned}\Psi_0 &= F_0(y) + A\{F_1(y)e^{i(\alpha x - \alpha c_r t + \theta)} + \tilde{F}_1(y)e^{-i(\alpha x - \alpha c_r t + \theta)}\} + O(A^2)\\ \frac{dA}{dt} &= \alpha c_i A + O(A^3)\end{aligned}\right\} \quad (5.1)$$

で表わされる基本流を考える。ここで，～は共役複素数，$F_0(y) = y - y^3/3$ は Poiseuille 流の流れ函数，$c = c_r + ic_i$ と $F_1(y)$ は線型安定理論から導びかれる Orr-Sommerfeld 方程式の固有値と固有函数である。固有函数は $F_1(0) = 1$ と正規化されているものとし，それに応じて振幅 A は低周波波動の流れ函数の $y = 0$ における値を表わす。

(5.1) に対応して，(2.9) の固有値と固有函数も A で展開して

$$\omega = W(k, \xi; A) = W_0(k) + A\{W_1(k)e^{i\xi} + \hat{W}_1(k)e^{-i\xi}\} + O(A^2) \quad (5.2)$$

$$\phi_0 = f(y; k, \xi, A) = f_0(y; k) + A\{f_1(y; k)e^{i\xi} + \hat{f}_1(y; k)e^{-i\xi}\} + O(A^2) \quad (5.3)$$

の形におく。ϕ_0 が任意の A に対して (2.6) をみたすために条件

$$f_0(0; k) = 1, \qquad f_1(0; k) = \hat{f}_1(0; k) = 0 \quad (5.4)$$

を課す。(5.2) と (5.3) を (2.9) に代入し，A^0 次の係数を 0 とおくと Orr-Sommerfeld 型方程式が得られる。

$$\left[\left\{\frac{1}{R}\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) + i(W_0 + kc_r) - ik\frac{dF_0}{dy}\right\}\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) + ik\frac{d^3F_0}{dy^3}\right]f_0 = 0 \quad (5.5)$$

これを境界条件 (2.3) のもとに解くと，固有値 W_0 が k の函数として定まり，同時に f_0 も固有函数として得られる。つぎに，A^1 次の係数からはふたつの非同次方程式が導びかれる。

$$L f_1 = ik\left\{\frac{dF_1}{dy}\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) - \frac{d^3F_1}{dy^3}\right\}f_0 - iW_1\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)f_0 \quad (5.6)$$

$$L \hat{f}_1 = ik\left\{\frac{d\tilde{F}_1}{dy}\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right) - \frac{d^3\tilde{F}_1}{dy^3}\right\}f_0 - i\hat{W}_1\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2\right)f_0 \quad (5.7)$$

ただし, L は (5.5) 左辺の微分作用素である。これらの方程式は右辺がつぎの可解条件をみたすときだけ解をもつ。

$$W_1 \int_0^1 \Phi(y)\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)f_0\,dy = k\int_0^1 \Phi(y)\left\{\frac{dF_1}{dy}\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)-\frac{d^3F_1}{dy^3}\right\}f_0\,dy \qquad (5.8)$$

$$\hat{W}_1 \int_0^1 \Phi(y)\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)f_0\,dy = k\int_0^1 \Phi(y)\left\{\frac{d\tilde{F}_1}{dy}\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)-\frac{d^3\tilde{F}_1}{dy^3}\right\}f_0\,dy \qquad (5.9)$$

ただし, $\Phi(y)$ は (5.5) に対応する随伴固有函数である。上式から W_1 と $\hat{W}_1$ が k の函数として定まる。なお, 微係数 W_0', W_1', $\hat{W}_1'$ 等も (5.5)−(5.7) を k で微分したときに得られる方程式の可解条件から直接求めることができる。

以上で (5.2) の各項が定まったので, ξ を ζ に置き換え, k と ζ で偏微分してそれぞれ 0 に等しいと置くと 0 点の座標 (k_0, ζ_0) を決定する方程式が得られる。

$$W_0'(k) + A\left\{W_1'(k)e^{i\zeta} + \hat{W}_1'(k)e^{-i\zeta}\right\} + O(A^2) = 0 \qquad (5.10)$$

$$-iA\left\{W_1(k)e^{i\zeta} - \hat{W}_1(k)e^{-i\zeta}\right\} + O(A^2) = 0 \qquad (5.11)$$

同時に (5.2) の虚部を 0 とおいて中立条件も得られる。

$$W_0^{(i)}(k) + A\,\mathrm{Im}\left\{W_1(k)e^{i\zeta} + \hat{W}_1(k)e^{-i\zeta}\right\} + O(A^2) = 0 \qquad (5.12)$$

本節の始めに述べた仮定にしたがい $O(A^2)$ 項を省略し, これらの三連立方程式を繰返し法を用いて解いた。

以上の計算に現われる同次型および非同次型 Orr−Sommerfeld 方程式の解法は文献11)に与えられている。数値計算は Reynolds 数 5000 から 50000 に対し, また, 各 R に対して増幅率 αc_i が最大値を取るような波数 α に対して行なわれ, 結果は図3と図

4に示されている。とくに注意すべきことは図3に与えられているξ_0の値が計算の範囲では常に負の値をとる点である。ただし，Rが約10^5程度のところで$\xi_0=0$が達せられるものと予想される。したがって，図4に与えられた限界振幅$A=A_N(R)$は層流の二次不安定に対する必要条件を示めすにすぎないと言える。しかし，ξ_0が高周波攪乱の代表的な長さの尺度，たとえば，$2\pi/k_{0r}$あるいは$2\pi/k_{0i}$等に比べて十分小さいことを考慮すると，図4の曲線が二次不安定の必要十分条件を与えていることが期待できる。

つぎに，高周波攪乱が低周波波動の一周期の間のどの位置に発生するかを調べてみる。図3よりξ_0が十分小さい値を取るから，0点近傍を通過した後の攪乱が実空間に現われる位置は0点の座標$\xi_0 \doteqdot \pi/4$に十分近いものと予想される。低周波波動の波頭$\xi=0$では，いわゆる critical layer $y=y_c$におけるx方向速度成分がほゞ最小値を取ることがわかっているので，高周波攪乱が発生する点は基本流の速度$\bar{U}(y_c)$が瞬間的に最小値を取る位置から約$\pi/4$だけ下流にずれた所ということになる。図5はこの様子を模擬的に描いたものである。

6. 考察

層流の二次不安定現象は Tollmien-Schlichting 波がある程度大

きくなって，三次元的な波に変形された後に生じることが実験[1]からは知られている。しかし，低周波波動が三次元であることが二次不安定にとって必須条件であるかどうかは明らかでない。本研究では理論的な簡単さから，二次元の低周波波動だけを考えたが，その結果，たとえ基本流が二次元であっても，その変動成分の振幅がある限界値を超えれば，高周波攪乱の増幅，すなわち二次不安定が起こり得ることがわかった。小さなスケールの高周波攪乱にとって最も重要な要素は自分自身の分布域にある局所的な媒体の性質だけであって，媒体が大きなスケールで見たとき二次元的に変化するか三次元的に変化するかはあまり重要な要素ではないものと思われる。

また，現実の攪乱は三次元的な波束であると思われるが，本研究では攪乱もやはり二次元と仮定されている。しかし，もし現実の攪乱がx方向にだけ波動的な動きをし，スパン方向の座標zに対しては振幅がゆるやかに変化する程度の三次元性を持つ波束であるならば，ここに与えた理論はそのままそのような波束の問題に適用できる。その場合には波数kと振動数ωはzに依存しない量としてさしつかえないからである。zへの依存は波束の形状すなわち(2.5)におけるA_0を決定するという一段進んだ計算過程で始めて現われてくる。

前節に与えた数値結果はすでに述べたようにかなり粗い近似に基づくものではあるが，定性的には満足のゆくものである。とくに，限界振幅$A_N(R)$がRとともに減少する点は注目に値する。しかし，定量的には多くを期待できない。振幅Aは低周波波動の流れ函数の$y=0$における値と定義されているが，実験で測定される波の大きさは，critical layer $y=y_c$ におけるx方向速度成分の平均値$\sqrt{\overline{u^2}}$であるから，実験値との比較のためにはAの次式によって変換する方が便利である。

$$(\sqrt{\overline{u^2}})_{max}/U_0=\sqrt{2}A|F_1'(y_c)| \tag{6.1}$$

この式にしたがうと，例えば$R=10^4$のとき，$|F_1'(y_c)|=2.23$，$A_N=0.0904$から$(\sqrt{\overline{u^2}})_{max}$の限界値は$U_0$の28%になる。同様の計算から$R=2\times10^4$に対しては20%，$R=5\times10^4$に対しては16%という限界値が得られる。これらの値は，平板境界層についての Klebanoff 等[1] の測定値 9% に比べて大きすぎるように思われる。この違いはもちろん境界層流と Poiseuille 流という速度分布形の違いにもよるであろうが，理論で省略された三次元性の効果が最も大きく作用しているのではないかと想像される。

1) Klebanoff et al. (1962) JFM 12, 1.　2) Tani (1969) Annual Review of Fluid Mechanics, 1, 169.
3) Lin (1955) Hydrodynamic Stability. Cambridge Univ. Press.　4) Stuart (1960) JFM 9, 353.
5) Itoh (1974) Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 17, 175.　6) 伊藤 (1975) 数理解析研講究録 244, 13.

7) Landahl (1972) JFM 56, 775. 8) Whitham (1965) Proc. Roy. Soc. A283, 238. 9) Stewartson (1975) Fluid Dynamic Transaction, 7, 101. 10) Whitham (1974) Linear and Nonlinear Waves. John Wiley & Sons. 11) Itoh (1974) Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci. 17, 65.

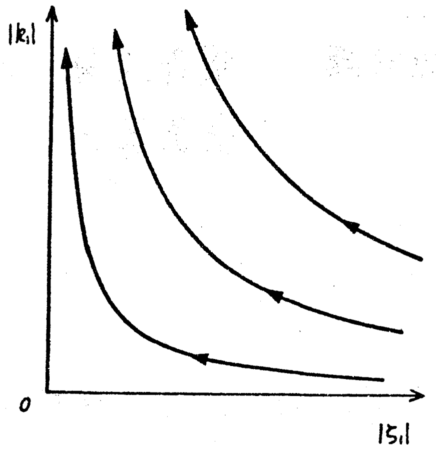

図1

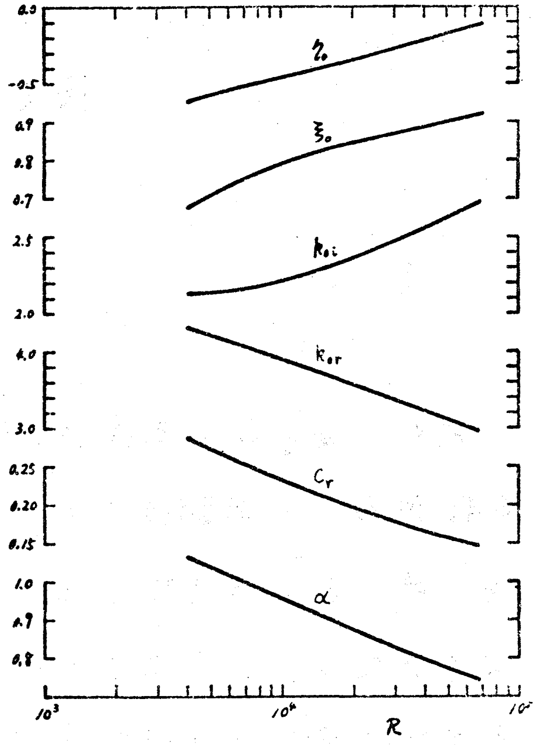

図3

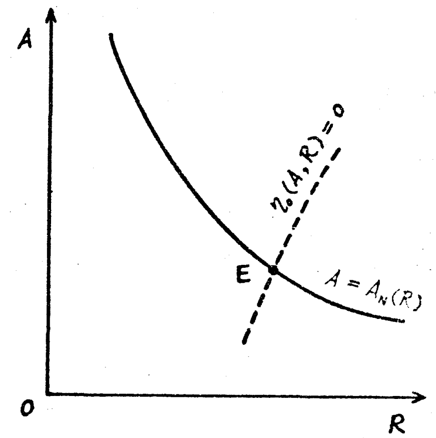

図2

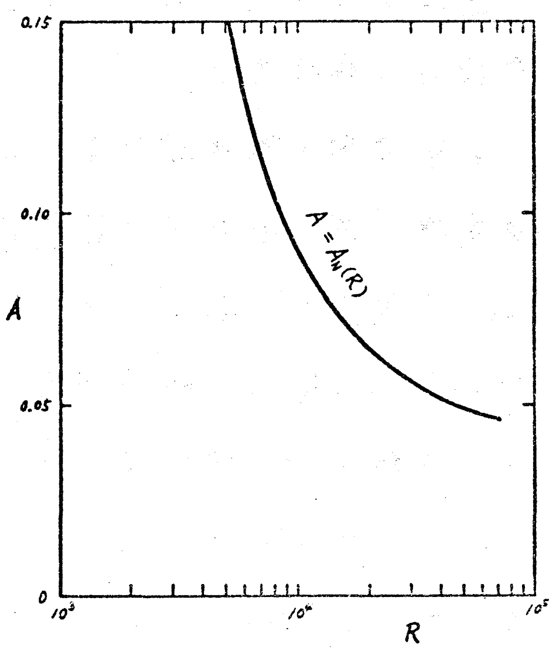

図4

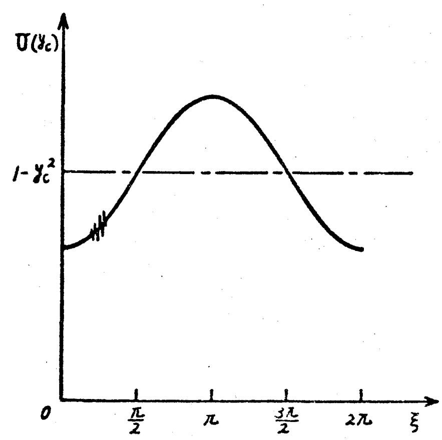

図5