数理解析研究所講究録
326巻 1978年 89-96

乱流のラグランジュ的取扱い

東大理学部　崎山雅行

§1 Introduction

乱流を理論的に取り扱い、Kolmogorov則と結びつけようという種々の試みがこれまでなされてきましたが、その中にEulerian Direct Interaction Approximationがあります。しかしこのEDIには一つの重要な欠点があります。それは、Kolmogorov則と関連づけようとすると、response方程式が発散してしまうということです。Kraichnanはその原因が、"小さなスケール"の速度場が"大きなスケール"の速度場によって流されることによるのではないかということを指摘しました。そしてオイラー的な取り扱いをやめ、ラグランジュ的な取り扱いをすることによってこの欠点は回避できると考え、LHDI(Lagrangian History Direct Interaction Approximation)の方法を用いました。実際には、方程式を閉じさせるために、LHDIを適当な仮定をもうけて変形した

ALH(Abriged Lagrangian History)というものを考案しました。しかしながら、LHDIからALHへのステップは簡単には理解し難いものです。そこでLHDIからALHへは行かずにもう少し簡単な近似を用いてresponse方程式の発散がLagrange的取り扱いをすることによって除去できるということ、及びそれをモデル化した方程式が、Kraichnanによって直観的に設定されたTFM(Test Field Model)の方程式に一致することを示す。

§2. LHDIの基礎方程式

ここでは、Kraichnanのそれに従って導きます。

まず、一般化された速度$\vec{u}(\vec{x}, s|t)$を時刻sに$\vec{x}$という位置にいた流体粒子が時刻tに持っている速度として定義します。$\vec{u}(\vec{x}, s|t)$でsをfixしておくと完全なLagrange的な速度です。又：$s=t$とおいたものはEuler的な速度に一致します。それゆえ$\vec{u}(\vec{x}, t|t)$という速度場はEuler的なNavier-Stokes方程式を満足します。つまり、

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t|t)}{\partial t} + u_j(\vec{x}, t|t)\frac{\partial}{\partial x_j}u_i(\vec{x}, t|t) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\Delta u_i(\vec{x}, t|t) \cdots\cdots (1)$$

$$\frac{\partial u_i(\vec{x}, t|t)}{\partial x_i} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

次に時刻sに$\vec{x}$という位置にいた流体粒子は時刻$s+\Delta s$

には、$\vec{x}+\vec{u}(\vec{x},s|s)\Delta s$ という位置にいますから、明らかに

$$\vec{u}(\vec{x},s|t)=\vec{u}(\vec{x}+\vec{u}(\vec{x},s|s)\Delta s,\ s+\Delta s|t)$$

ゆえに $\dfrac{\partial u_i(\vec{x},s|t)}{\partial s}+u_j(\vec{x},s|s)\dfrac{\partial u_i(\vec{x},s|t)}{\partial x_j}=0$ ……(3)

(1),(2),(3)を Fourier 変換して P を消去すると次のようになります。

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(\vec{k},t|t)=-\nu k^2 u_i(\vec{k},t|t)+M_k^{ijm}\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},t|t)\times u_m(\vec{q},t|t) \quad \text{……(4)}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}u_i(\vec{k},s|t)=-ik_j\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},s|s)u_i(\vec{q},s|t) \quad \text{……(5)}$$

(4),(5)が、LHDI の基礎方程式です。

ここで $M_k^{ijm}=-\dfrac{i}{2}(k_jP_k^{im}+k_mP_k^{ij})$, $P_k^{ij}=\delta_{ij}-\dfrac{k_ik_j}{k^2}$

又、$\int_p$ は $\iiint d^3\vec{p}$ のことです。

§3、簡単な近似とその結果

(5)の方程式を積分すると次のようになります。

$$u_i(\vec{k},t'|t)=u_i(\vec{k},t|t)+ik_j\int_{t'}^{t}ds\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})\times u_j(\vec{p},s|s)u_i(\vec{q},s|t) \quad \text{……(6)}$$

今は Lagrange 的な変化だけを考えたいのですから(6)を、t' を fix して t について微分すると、次のようになります。

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(\vec{k},t'|t)=\frac{\partial u_i(\vec{k},t|t)}{\partial t}+ik_j\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},t|t)u_i(\vec{q},t|t)$$

$$+ik_j\int_{t'}^{t}ds\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},s|s)\frac{\partial u_i(\vec{q},s|t)}{\partial t}$$

これに(4)を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(\vec{k},t'|t)=\overline{M}_k^{ijm}\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},t|t)u_m(\vec{q},s|t)$$

$$+ik_j\int_{t'}^{t}ds\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},s|s)\frac{\partial u_i(\vec{q},s|t)}{\partial t}\cdots\cdots(7)$$

$$\overline{M}_k^{ijm}\equiv i\frac{k_ik_jk_m}{k^2}$$

ここでは簡単のため inertial subrange を考えるとして $\nu=0$ とおいた。

この(7)という式は右辺の最後の項のために、閉じていません。そこで $|t-t'|\ll 1$ として、右辺の第二項を摂動項と考えて展開すると

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i(\vec{k},t'|t)=\overline{M}_k^{ijm}\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},t|t)u_m(\vec{q},t|t)$$

$$+(t-t')ik_j\int_p\int_q\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})u_j(\vec{p},t|t)$$

$$\times\overline{M}_q^{iab}\int_r\int_\ell\delta(\vec{q}-\vec{r}-\vec{\ell})u_a(\vec{r},t|t)u_b(\vec{\ell},t|t)+O((t-t')^2)$$

$$\text{------------}(8)$$

P_k^{im} と $\Pi_k^{im}\equiv\delta_{im}-P_k^{im}$ という solenoidal part と curl free part をとり出す射影演算子を使って、この方程式を

２つに分離すると次のようになります。

$$\frac{\partial}{\partial t}U_i^s(\vec{k},t'|t)=(t-t')ik_j P_k^{im}\iint_{pq}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})U_j(\vec{p},t|t)$$

$$\times\overline{M}_q^{mab}\iint_{rl}\delta(\vec{q}-\vec{r}-\vec{l})U_a(\vec{r},t|t)U_b(\vec{l},t|t)$$

$$+O((t-t')^2)\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}U_i^c(\vec{k},t'|t)=\overline{M}_k^{ijm}\iint_{pq}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})U_j(\vec{p},t|t)U_m(\vec{q},t|t)$$

$$+(t-t')ik_j\Pi_k^{im}\iint_{pq}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})U_j(\vec{p},t|t)\overline{M}_q^{mab}\iint_{rl}\delta(\vec{q}-\vec{r}-\vec{l})$$

$$\times U_a(\vec{r},t|t)U_b(\vec{l},t|t)+O((t-t')^2)\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$U_i^s(\vec{k},t'|t)\equiv P_k^{i\alpha}U_\alpha(\vec{k},t'|t)$$
$$U_i^c(\vec{k},t'|t)\equiv\Pi_k^{i\alpha}U_\alpha(\vec{k},t'|t)$$

isotropic であることを仮定すると$\langle U_i^c(\vec{k},t'|t)U_n(\vec{k},t'|t')\rangle$は零になるので今は(9)だけを使って$Q_{in}^s(\vec{k},t';t)\equiv\langle U_i^s(\vec{k},t'|t)$

$\times U_n(\vec{k},t'|t)\rangle$

に対する方程式をつくると

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{im}^s(\vec{k},t';t)=(t-t')ik_j P_k^{im}\iint_{pq}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})\overline{M}_q^{mab}\iint_{rl}\delta(\vec{q}-\vec{r}-\vec{l})$$

$$\times\langle U_j(\vec{p},t|t)U_a(\vec{r},t|t)U_b(\vec{l},t|t)U_n(-\vec{k},t|t)\rangle+O((t-t')^2)$$

ここで場がGaußianであると近似し stationary を仮定すると上の方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}Q^{s}_{in}(\vec{k},t-t') \cong 2(t-t')ik_j P_k^{im}\iint_{p\,q}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})\overline{M}_q^{mab}Q_{ja}(\vec{p},0)$$
$$\times Q_{bm}(\vec{q},0)+O((t-t')^2)$$

そして isotropic を仮定し、$Q^{s}_{in}(\vec{k},t-t')\equiv P_k^{in}Q^{s}(k,t-t')$ を代入すると.

$$\frac{\partial}{\partial t}Q^{s}(k,t-t') \cong (t-t')\hat{\iint}_{p,r}2\pi kpr\,\widehat{b}(k,p,r)q(p)q(k)+O((t-t')^2)$$

ここで $k^2\widehat{b}(k,p,r)=ik_j P_k^{mb}P_p^{ja}\overline{M}_r^{mab}$,　$q(p)=Q^{s}(p,0)$

又 $\hat{\iint}_{p,r}$ は $\int_0^\infty dp\int_{|k-p|}^{k+p}dr$ を表わす。

更に、$Q^{s}(k,t-t')=q(k)\exp[-\frac{1}{2}\sigma_k(t-t')^2]$ と仮定すると

$$\sigma_k \cong -2\pi\hat{\iint}kpr\,\widehat{b}(k,p,r)q(p) \quad\cdots\cdots(11)$$

§4　TFMとの関係

$U_i^{c}(\vec{k},t'|t')=0$ と (10) より

$$U_i^{c}(\vec{k},t'|t)=(t-t')\overline{M}_k^{ijm}\iint_{p\,q}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})U_j(\vec{p},t|t)U_m(\vec{q},t|t)+O((t-t')^2)$$

よって (9) は

$$\frac{\partial}{\partial t}U_i^{s}(\vec{k},t'|t)=ik_j P_k^{im}\iint_{p\,q}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})U_j^{s}(\vec{p},t'|t)U_m^{c}(\vec{q},t'|t)+O((t-t')^2)$$
$$\cdots\cdots\cdots(12)$$

となります。又 (10) も

$$\frac{\partial}{\partial t}U_i^{c}(\vec{k},t'|t)=\overline{M}_k^{ijm}\iint_{p\,q}\delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})U_j^{s}(\vec{p},t'|t)+U_m^{s}(\vec{q},t'|t)+O(t-t')$$
$$\cdots\cdots\cdots(13)$$

となります。

(12), (13) の右辺を第一項だけで近似すると、それぞれ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u_i^s(\vec{k}, t'|t) = i k_j P_k^{im} \displaystyle\int_p\int_q \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})\, u_j^s(\vec{p}, t'|t)\, u_m^c(\vec{q}, t'|t) \\ \dfrac{\partial}{\partial t} u_i^c(\vec{k}, t'|t) = \overline{M}_k^{ijm} \displaystyle\int_p\int_q \delta(\vec{k}-\vec{p}-\vec{q})\, u_j^s(\vec{p}, t'|t)\, u_m^s(\vec{q}, t'|t) \end{cases}$$

となります。これは本質的にTFMの基礎方程式と一致しています。

(実際に response 方程式の発散の落ち方がTFMと同じということが、分ります。; cf. §5)

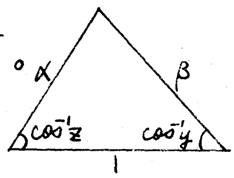
つまり、Lagrange 的に取り扱い、上に述べた近似 行ない、それを model 方程式として採用したものが、TFMであると解釈できるということです。

§5 Kolmogorov 則との関係 [発散が除去されているということ]

σ_k, $q(k)$ として $\sigma_k = D\varepsilon^{2/3}k^{4/3}$, $q(k) = \dfrac{K_0}{4\pi}\varepsilon^{2/3}k^{-11/3}$ という Kolmogorov form を (11) に代入し、$p = \alpha k$, $r = \beta k$ とおいて無次元化すると $\dfrac{2D}{K_0} = \iint^{\Delta'}_{\alpha,\beta} \beta\alpha^{-8/3}(1-y^2)(1-z^2)$ となる。

ここで、y, z は右図で定義されるものです。

又、$\iint^{\Delta'}_{\alpha,\beta}$ は $\int_0^\infty d\alpha \int_{|1-\alpha|}^{1+\alpha} d\beta$ を表わしています。



この式が response 方程式に対応する式ですが、EDI の response 方程式におけるような発散はもっていません。これは $\hat{G}(k, p, r)$ が $p = 0$ で 0 になるためです。この $\hat{G}(k, p, r)$

は、TFMから出てくる $b^s(k,p,r)$ と数 factor をのぞいて一致します。