

複素  $V$ -多様体の Riemann-Roch 定理

阪大 理 川崎 徹郎

1. 導入  $M$  をコンパクト複素多様体,  $E \rightarrow M$  を  $M$  上の整型ベクトル束とする. 今  $E \rightarrow M$  の自己同型  $g$  が  $\text{Aut}(E \rightarrow M)$  の中でコンパクトな閉部分群を生成しているとする.  $g$  は  $E$  の局所整型切断の作る層  $\mathcal{O}(E)$  に作用し, 従ってコホモロジー群  $H^i(M; \mathcal{O}(E))$  に線型に作用する. ここで同変算術種数と

$$\chi(g, M; \mathcal{O}(E)) = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \text{trace} [g | H^i(M; \mathcal{O}(E))]$$

で定義すると, Atiyah-Singer の同変 Riemann-Roch 定理により

$$\chi(g, M; \mathcal{O}(E)) = \langle \mathcal{T}^g(M; E), [M^g] \rangle$$

と表わされる. ここで  $M^g$  は不動点集合,  $[ ]$  はホモロジー基本類,  $\mathcal{T}^g(M; E)$  は同変 Todd 類で次の様に定義される.  $N = \nu(M^g \subset M)$  を法束とする.  $M^g$  の各点  $x$  に対し,  $g$  は  $N$  及び  $E$  の繊維  $N_x, E_x$  に線型に作用する. その固有値  $e^{i\theta}$  に属する固有空間を  $(N_\theta)_x, (E_\theta)_x$  と書くと, Whitney 和による分解

$$E|_{M^2} = \bigoplus_{0 \leq \eta < 2\pi} E_\eta, \quad N = \bigoplus_{0 < \theta < 2\pi} N_\theta$$

が得られた。一般に複素ベクトル束の Chern 類を形式的に  $\prod_{j=1}^{\dim \xi} (1 + x_j)$  と書く時、特性類  $T, T_\theta, ch_\eta$  は

$$\begin{cases} T(\xi) = \prod_j \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} \\ T_\theta(\xi) = \prod_j \frac{1}{1 - e^{-x_j - i\theta}} & 0 < \theta < 2\pi \\ ch_\eta(\xi) = \sum_j e^{x_j + i\eta} & 0 \leq \eta < 2\pi \end{cases}$$

で与えられた。すると同変 Todd 類は

$$\mathcal{T}^g(M; E) = \left( \sum_\eta ch_\eta(E_\eta) \right) \cdot T(TM^2) \cdot \prod_\theta T_\theta(N_\theta)$$

で定義される。

次に  $G \subset \text{Aut}(E \rightarrow M)$  を有限変換群としよう。すると作用による商空間  $M/G$  は解析空間となり、 $E \rightarrow M$  の  $G$ -不変な局所整型切断は  $M/G$  上の連接的解析層  $\mathcal{O}_V(E/G)$  を定義する。今  $M$  上の  $E$  を係数とする Dolbeault 複体の  $G$ -不変な部分は  $M/G$  上の層  $\mathcal{O}_V(E/G)$  の柔軟解消を与えよから、同型

$$H^i(M/G; \mathcal{O}_V(E/G)) \cong H^i(M; \mathcal{O}(E))^G$$

を得る。ここで有限群の既約指標の直交性を用いると、 $M/G$  の  $\mathcal{O}_V(E/G)$  を係数とする算術種数は

$$\begin{aligned}
\chi(M/G; \mathcal{O}_V(E/G)) &= \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i \dim H^i(M/G; \mathcal{O}_V(E/G)) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_i (-1)^i \text{trace} [g | H^i(M; \mathcal{O}(E))] \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \mathcal{T}^g(M; E), [M^g] \rangle
\end{aligned}$$

と表わすことができた。

一般にベクトル束の特性類は線型接続と与えることにより曲率形式の多項式として表わすことができた。曲率形式は接続により局所的に与えられることに注意しよう。このことを用いて上式を  $M/G$  上局所的に書き直してみよう。

今までの  $g \in G$  につき、接束  $TM^g$ , 法束  $\nu(M^g \subset M)$ , 係数束  $\pi^* M^g$  に線型接続を選び、全体として  $G$ -不変になつていようとする。各点  $x \in M$  につき  $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$  - 不変な近傍  $\tilde{U}_x$  ととり,  $U_x = \tilde{U}_x / G_x$  が [2] の  $M/G$  での近傍と同視されるようにする。各  $\tilde{U}_x$ , 各  $g \in G_x$  につき,  $\tilde{U}_x^g$  上には特性形式  $\mathcal{T}^g(\tilde{U}_x, E)$  が定まらている。  $M/G$  上の開被覆  $\{U_x\}$  に従う 1 の分解  $\{\varphi_{x_i}\}_{i=1, \dots, N}$  と与えたと上式は次の式と同値である。

$$\chi(M/G; \mathcal{O}_V(E/G)) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{|G_{x_i}|} \sum_{g \in G_{x_i}} \int_{\tilde{U}_{x_i}^g} \varphi_{x_i} \mathcal{T}^g(\tilde{U}_{x_i}, E)$$

この式は接続が全体的に与えられている事と除けば、全く  $(G_x, \tilde{U}_x)$  上の情報だけで書かれている。従って我々はこの式が局所的に  $\tilde{U}/G$  の形をしている解析空間に対して成立することを期待することが出来る。このような空間の定式化(複素  $V$ -多様体), 及びそのような空間への上記の拡張を次に述べる。

2. 定義と定理 はじめに複素  $V$ -多様体とその上の整型ベクトル  $V$ -束と定義する。これは空間  $M/G$  と写像  $E/G \rightarrow M/G$  の一般化である。

$X$  を解析空間とする。  $X$  上の複素  $V$ -多様体構造とは次の様なものである。  $\mathcal{U}$  を  $X$  の十分細かい位相の基とする。

(I) 各  $U \in \mathcal{U}$  に対して複素多様体  $\tilde{U}$  と有限群  $G \subset \text{Aut}(\tilde{U})$  があって、同視  $U \cong \tilde{U}/G$  が与えられている。

(II)  $U, U' \in \mathcal{U}$ ,  $U \subset U'$  とすると開部分集合の上への双整型写像  $\varphi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$  があって、包含  $U \subset U'$  と覆っている。

その時  $\varphi$  は  $G_{U'}$  の作用を除いて唯一つ定まり、各  $\varphi$  は群単射  $\lambda_\varphi: G_U \rightarrow G_{U'}$  を定め、 $\varphi$  は  $\lambda_\varphi$ -同変になる。

$X$  と複素  $V$ -多様体,  $p: E \rightarrow X$  と解析空間の間の写像とする。  $E \rightarrow X$  上の整型ベクトル  $V$ -束構造とは:

(I) 各  $U \in \mathcal{U}$  に対して  $G_U$ -同変な整型ベクトル束  $\tilde{E}_U \rightarrow \tilde{U}$  があって、写像  $p: p^{-1}(U) \rightarrow U$  と商空間の間の写像  $\tilde{E}_U/G_U \rightarrow \tilde{U}/G$

とは同一視される。

(II)  $U, U' \in \mathcal{U}$ ,  $U \subset U'$  とすると, 各  $\varphi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$  に対してその上の整型束写像  $\pi: \tilde{E}_U \rightarrow \tilde{E}_{U'}$  があり, 包含  $\bar{p}(U) \subset \bar{p}(U')$  を覆っている。

その時  $\pi$  は  $\lambda_\varphi$ -同変となり, 各  $\tilde{E}_U \rightarrow \tilde{U}$  の  $G_U$ -不変な局所整型切断は解析空間  $X$  上の連続的解析層  $\mathcal{C}_V(E)$  と定義する。

注意 一般に  $X$  と  $V$ -多様体とする時, 各  $U \in \mathcal{U}$  に対して接ベクトル束  $T\tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  と対応させると接ベクトル  $V$ -束  $TX$  が得られる。また各  $U \in \mathcal{U}$  に対し  $T\tilde{U}$  の同伴主繊維束  $P(T\tilde{U})$  と対応させると, 接主繊維束  $P(TX)$  が得られるが, この時, 空間  $P(TX)$  は特異点をもたず  $C^\infty$ -多様体になる。さらに右からの構造群の作用が定義され,  $X$  はその作用の商空間と同一視される。特に構造群がコンパクトにとれば, すべての  $V$ -多様体はコンパクト群の作用による  $C^\infty$ -多様体の商空間として得られることがわかる。

$X$  とコンパクト複素  $V$ -多様体;  $E \rightarrow X$  と整型ベクトル  $V$ -束とする。今すべての  $U \in \mathcal{U}$ , すべての  $g \in G_U$  に対して,  $T\tilde{U}^g$ ,  $\nu(\tilde{U}^g \subset \tilde{U})$ ,  $\tilde{E}_U|_{\tilde{U}^g}$  に線型接続があり, 群  $G_U$  の作用, 貼合せ  $\varphi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ ,  $\pi: \tilde{E}_U \rightarrow \tilde{E}_{U'}$  に対して不変であるとする。この事は,  $X$  上の開被覆  $\mathcal{U}$  に従う  $1$  の分解  $\{\varphi_i\}$  があり, 接続は  $1$  の分解によって貼合せることができることから

常に可能である。今、各  $\tilde{U}^g$  上には特性形式  $\mathcal{T}^g(\tilde{U}; \tilde{E}_U)$  が定義され、群  $G_U$  の作用、各貼合せ  $\varphi: \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$  に対して不変になっている。この時解析空間  $X$  の  $\mathcal{O}_V(E)$  を係数とする算術種数は次の様に表わされる。

$$\chi(X; \mathcal{O}_V(E)) = \sum_{i=0}^{\dim X} (-1)^i \dim H^i(X; \mathcal{O}_V(E))$$

$$= \sum_{U \in \mathcal{U}} \frac{1}{|G_U|} \sum_{g \in G_U} \int_{\tilde{U}^g} \varphi_U \cdot \mathcal{T}^g(\tilde{U}; \tilde{E}_U)$$

この式の右辺の  $g=1$  で定義される部分と考えると、これは通常の Todd 形式の  $X$  上での積分になっている。  $V$ -多様体上でも自然に de Rham の定理が拡張され、この Todd 形式はコホモロジー群  $H^*(X; \mathbb{R})$  の元  $\mathcal{T}(X; E)$  を定めておけることがわかり、上記の積分はホモロジー-基本類  $[X]$  との Kronecker 積で与えられている。残りの部分は特異点集合の上での積分になっているが、一般に  $V$ -多様体の特異点集合は  $V$ -多様体ではないので意味は明確でない。そこで  $V$ -多様体の特異点集合をバラバラに分解して  $V$ -多様体に組み直すことを試みてみる。

$V$ -多様体  $X$  の各点  $x$  は  $\mathcal{U}$  と十分細かくとることにより、 $x$  の近傍  $U_x \in \mathcal{U}$  があって、 $x$  は  $\tilde{U}_x$  上の  $G_x = G_{U_x}$  の作用による不動点であるとしてよい。このように  $G_x$  は内部自己同型を除いて唯一つ定まる。  $G_x$  の元の共役類と  $(h_x^0) = (1), (h_x^1), \dots$

$(h_x^{p_x})$  とおく. すると集合  $\{(y, (h_y^j)) \mid y \in U_x, j=1, 2, \dots, p_y\}$   
 $(j=0 \text{ は除く})$  は並置和  $\coprod_{i=1}^{p_x} \tilde{U}^{h_x^i} / Z_{G_x}(h_x^i)$  と自然に同一視  
 される. ここで  $Z_{G_x}(h_x^i)$  は元  $h_x^i$  の  $G_x$  の中での中心化群.  
 そこで集合  $\tilde{\Sigma} X = \{(x, (h_x^i)) \mid x \in X, i=1, \dots, p_x\}$  と考  
 えると上の同一視により,  $V$ -多様体の構造ととも.  $\tilde{\Sigma} X$  は色  
 々な次元の連結成分ととも, すべての  $U \in \mathcal{U}$  とすべての  $g \in G_U$   
 $(g \neq 1)$  につき商空間  $\tilde{U}^g / Z_{G_U}(g)$  と自然に貼合せたもの  
 と考えることができる. 今  $\tilde{\Sigma} X$  の各座標近傍  $(Z_{G_U}(g), \tilde{U}^g)$  上  
 には微分形式  $\mathcal{T}^g(\tilde{U}, \tilde{E}_U)$  が乗っており,  $Z_{G_U}(g)$  の作用及び  
 座標近傍の貼合せに関して不変になっている. 従って形式和  
 $\sum_{g \in G_U} \mathcal{T}^g(\tilde{U}, \tilde{E}_U)$  は  $\tilde{\Sigma} X$  上のコホモロジー類  $\mathcal{T}^\Sigma(X; E)$  と  
 定義する.  $\tilde{\Sigma} X$  の連結成分を  $\tilde{\Sigma} X_1, \dots, \tilde{\Sigma} X_c$  とおき, 各連結  
 成分  $\tilde{\Sigma} X_i$  には重複度  $m_i = |\text{kernel of } Z_{G_U}(g) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{U}^g)| \neq 1$   
 と対応させる.

定理  $X$  をコンパクト複素  $V$ -多様体,  $E \rightarrow X$  を整型ベ  
 クトル  $V$ -束とすると, 次が成立つ:

$$\begin{aligned}
 \chi(X, \mathcal{O}_V(E)) &= \langle \mathcal{T}(X, E), [X] \rangle \\
 &+ \sum_{i=1}^c \frac{1}{m_i} \langle \mathcal{T}^\Sigma(X; E), [\tilde{\Sigma} X_i] \rangle.
 \end{aligned}$$

注意  $\mathcal{J}(X; E)$  は Chern 類の有理係数多項式で表わされ、ベクトル  $V$ -束の Chern 類は位相幾何的方法で有理係数コホモロジー-群で定義されるから、右辺の每一项は有理数である。

3. 証明の概略 定理の証明には次に述べる事実が基本的である。

$U$  を Riemann 多様体の芽とし、 $E \rightarrow U$  と Hermité 計量をもつベクトル束とする。  $g: E \rightarrow E$  と対  $(U, E_0)$  の等長写像とする。  $A: C^\infty(U; E) \rightarrow C^\infty(U; E)$  と  $g$ -不変、形式的自己随伴、正定値な楕円型微分作用素とする。その時、不動点集合  $U^g$  上に偏るかな測度  $\sum_A^g$  が定まる。  $\sum_A^g$  は局所的に定まり、作用  $g$  と作用素  $A$  による普遍的な表示をもつ。  $\sum_A^g$  は次の性質をもつ：

(I)  $M$  をコンパクトな Riemann 多様体 ( $\partial M = \emptyset$ )、 $g: M \rightarrow M$  と等長写像とする。  $E, F$  を  $M$  上の 2 つの  $g$ -同変なベクトル束で、 $g$ -不変な Hermité 計量をもつとする。  $D: C^\infty(M; E) \rightarrow C^\infty(M; F)$  と  $g$ -不変な楕円型微分作用素とする。すると随伴  $D^*$  が定まり、2 つの  $g$ -不変、自己随伴、正定値な楕円型微分作用素  $D^*D$  及び  $DD^*$  が得られる。ここで  $\mu_D^g = \sum_{D^*D}^g - \sum_{DD^*}^g$  とおく。すると  $D$  の同変指数は

$$\text{ind}(g, D) = \int_{M^3} d\mu_D^g$$

で与えられる。

(II)  $X$  をコンパクトな Riemann  $V$ -多様体とし,  $E, F$  を  $X$  上の Hermitz 計量をもつ 2 つのベクトル  $V$ -束とする.  $D = \{ D_U : C^\infty(\tilde{U}; \tilde{E}_U) \rightarrow C^\infty(\tilde{U}; \tilde{F}_U) \}_{U \in \mathcal{U}}$  を  $G_U$ -不変な楕円型作用素の族で貼合せに関して不変なものとする. 各  $\tilde{E}_U \rightarrow \tilde{U}$  【 $\tilde{F}_U \rightarrow \tilde{U}$ 】の  $G_U$ -不変な  $C^\infty$ -切断の芽は  $X$  上の層  $C_V^\infty(E)$  【 $C_V^\infty(F)$ 】を定義し, その大域切断の作るベクトル空間を  $C_V^\infty(X; E)$  【 $C_V^\infty(X; F)$ 】と書く.  $D$  は線型写像  $D: C_V^\infty(X; E) \rightarrow C_V^\infty(X; F)$  を定義し, その核と余核の次元の差を  $V$ -指数  $\text{ind}_V(D)$  とおく. 各  $U \in \mathcal{U}$  毎に形式和  $\sum_{g \in G_U} \mu_{D_U}^g$  があるから, こゝろは  $X$  上  $\sum X$  上の測度  $\mu_D + \mu_D^\Sigma$  を定義する. この時

$$\text{ind}_V(D) = \int_X d\mu_D + \sum_{i=1}^c \frac{1}{m_i} \int_{\sum X_i} d\mu_D^\Sigma$$

が成立つ。

さて  $X$  をコンパクト複素  $V$ -多様体,  $E$  を  $X$  上の整型ベクトル  $V$ -束とする. この時算術種数  $\chi(X, \mathcal{O}_V(E))$  は  $E$  を係数とする,  $X$  の複素構造より定まる Spin<sup>c</sup> Dirac 作用素の  $V$ -指数と一致している. 従つて  $D$  を Spin<sup>c</sup> Dirac 作用素とする時, 測度  $\mu_D^g$

の定める微分形式  $d\mu_0^g$  が特性形式  $\mathcal{T}^g(\tilde{U}; \tilde{E}_0)$  と一致すること  
 を示せばよい. 今  $d\mu_0^g$  を定めているのは,  $\tilde{U}^g$  の標準複素線束  
 の Hermité 計量と計量接続, 複素ベクトル束  $(\tilde{E}_0 | \tilde{U}^g)_\eta$  ( $0 \leq \eta < 2\pi$ )  
 及び  $\nu(\tilde{U}^g < \tilde{U})_0$  ( $0 < \theta < 2\pi$ ) の Hermité 計量と計量接続,  
 及び  $\tilde{U}^g$  の Riemann 計量である. しかも  $d\mu_0^g$  はこれらの情報に  
 局所的にしか依存せず, また計量を定数倍しても変化しない.  
 ここで Gilkey の定理によれば, このような, 微分形式に値と  
 も局所不変量は特性形式しか有り得ない. すなわち  $d\mu_0^g$  は,  
 $\tilde{U}^g$  の標準複素線束の Chern 形式,  $T\tilde{U}^g$  の Pontrjagin 形式,  
 $(\tilde{E}_0 | \tilde{U}^g)_\eta$  の Chern 形式, 及び  $\nu(\tilde{U}^g < \tilde{U})_0$  の Chern 形式の多項  
 式で表わされる. 特に今の場合, 複素構造より定まる Spin $^c$ -  
 構造を考えているので,  $d\mu_0^g$  は Chern 形式の普遍的な多項式で  
 表わされることがわかる. ところが上の性質 (I) より, いくつ  
 かの例で同変種数を計算してみると, この多項式の係数は唯  
 一に定まることがわかり, それは同変 Todd 形式でなければ  
 ならない.

### 参 照

T. Kawasaki: The signature theorem for V-manifolds,  
*Topology* 17 (1978) 75-83.

T. Kawasaki: The Riemann-Roch Theorem for complex V-manifolds,  
 to appear in *Osaka J. of Math.*