

Newton 境界の位相について.

東大 理 岡 睦雄

○ 1966年、E. Brieskorn がある種の多項式の特異点の近傍境界として、エキゾチック球面を発見して以来、極めて種々の結果が超曲面特異点の位相について得られた。特に Milnor は [5] において、系統的研究を行ない、種々の美しい結果を得た。例えば、「 $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ が原点での孤立特異点を持つ仮定の下に、 f が原点の近傍で定義する Milnor 束のファイバーは $(n-1)$ -連結である」という事を示した。しかしながら孤立しない特異点の位相に関する限り、殆んど皆無に等しい結果しか得られない。勿論、非孤立特異点の研究の難しさの1つの大きな因子は、「Milnor ファイバーは一般に単連結にはならない」という事であろう。

最近 Kouchnirenko は [4] において、退化しない Newton 境界を持つ、原点において孤立する特異点を持つ解析関数 $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ の Milnor 数が Newton 境界 $\Gamma(f)$ と原点との錐 $\Sigma(f)$ の

Newton 数に等しい事を示した。筆者は以前より非退化の概念の重要性に注目していたが、Kouchnirenko の仕事に起爆として、Newton 境界が非退化の時には、その Milnor 束が $\Gamma(f)$ のみで完全に記述される事を示し、とくに擬斉次多項式の場合には Milnor 束を完全に決定した。以下その概要を説明する。詳細の証明は、[2], [3] を見られたい。

1. 記号及び主定理.

\mathbb{Z} : 整数ある n は無限巡回群

\mathbb{N} : 非負整数.

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$$

$$z^\nu = z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \cdots z_{n+1}^{\nu_{n+1}}, \quad |\nu| = \sum_{i=1}^{n+1} \nu_i \quad (z \in \mathbb{C}^{n+1}; \nu \in \mathbb{N}^{n+1})$$

$$\mathbb{R}^I = \{z \in \mathbb{R}^{n+1}; z_j = 0 \quad (j \notin I)\} \\ \mathbb{C}^I = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; z_j = 0 \quad (j \notin I)\} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \mathbb{R}^I \\ \mathbb{C}^I \end{matrix}} \right\} I \subset \{1, 2, \dots, n+1\}.$$

m -volume P : m 次元体積 (P は \mathbb{R}^m の多面体)

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

$f(z_1, \dots, z_{n+1}) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^{n+1}} c_\nu z^\nu$ は擬斉次多項式で $(a_1, \dots, a_{n+1}; d)$ をその重さの型とする。則ち、 $f(z_1^{a_1}, \dots, z_{n+1}^{a_{n+1}})$ は d 次斉次多項式となる。 $\{a_i\}$ は正整数で、最大公約数 $\text{G.C.M}(a_1, \dots, a_{n+1}) = 1$. Δ を $\{\nu; c_\nu \neq 0\}$ で張られる凸な多面体とし、 $\Delta(0)$ を Δ と原点の錐であるとある。 f の Milnor 束

$f: \mathbb{C}^{n+1} - f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ 及び γ の自然の制限 $f^*: (\mathbb{C}^*)^{n+1} - f^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ を考え、 $F, F^* \in \gamma$ の各ファイバーとする。 $\rho \in F^* \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ で定義される自然の写像、 $h: F \rightarrow F$ ($h^*: F^* \rightarrow F^*$) $z \mapsto (z_1 \exp \frac{z_1}{z} 2\pi i F, \dots, z_{n+1} \exp \frac{z_{n+1}}{z} 2\pi i F)$ で定義される monodromy 写像とする。以下 (2) は非退化と仮定する。 i.e. 任意の面 $\Delta \subset \Delta$ に関して、 $\frac{\partial f_E}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f_E}{\partial z_{n+1}} = 0$ は $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$ に解を持たない。 したがって $f_E(z) = \sum_{\nu \in E} c_\nu z^\nu$ 。 γ の時。

定理 (1.1): $\dim \Delta = n$ とする。 γ の時、次が成立つ。

- (i) $\chi(F^*) = (-1)^n (n+1)! (n+1)\text{-volume } \Delta(0)$
- (ii) ρ は n -同値写像。 i.e. $\pi_j: \pi_1(F^*) \rightarrow \pi_1((\mathbb{C}^*)^{n+1})$ は同型で、 $\pi_j(F^*) = 0$ ($1 < j < n$)

F^* は n 次元 CW-complex のホモトピー型を持つので、2 の定理で完全にホモトピー的に記述される。

系 (1.1.1) (i) $(h^*)_+ : H_j(F^*; \mathbb{Z}) \rightarrow H_j(F^*; \mathbb{Z})$ は恒等写像 ($0 \leq j < n$) に等しい。 (ii) h^* のセータ函数 $\zeta(h^*; t)$ は $(1-t^d)^{-\frac{\chi(F^*)}{d}}$ で与えられる。

$\dim \Delta < n$ の時も上の定理で完全に記述される。 則ち、 $r = \dim \Delta$ とすれば、

系 (1.1.2). 適当な $(r+1)$ 変数の擬齊次多項で定理 (1.1) の仮定を満足するもの $g(z_1, \dots, z_{r+1})$ が存在して、 F^* は $G^* \times (\mathbb{C}^*)^{n-r}$ と微分同型。 したがって、 $G^* \subset (\mathbb{C}^*)^{r+1}$ は g に対応するファイバー。

2. 持ち上げ原理, 射影原理.

以下 $f(z), F^*$ 等 f と同じとする. 今 $GL(n+1; \mathbb{Z})$ から行列 $N = (b^1, \dots, b^{n+1})$ を取り, $g_N: (\mathbb{C}^*)^{n+1} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^{n+1}$ と $z \mapsto (z^{b^1}, \dots, z^{b^{n+1}})$ で定義しよう. g_N が $|\det N|$ 枚の被覆写像になる事は明白であろう. $f_N(z) \equiv f(g_N(z))$ で定義すれば, f_N はやはり擬斉次多項式で, 定理(1.1)の仮定を満す. (重さには負になるかも知れない.) この時,

補題(2.1). 定理(1.1)の主張は $f(z)$ と $f_N(z)$ に対するいずれ物についても成立すれば他方についても成立する.

基本群に対する主張のみが明らかではないが, 証明は難しくらしい. ([3] 参照)

これに依って以下我々は $f(z)$ は斉次多項式で次数 d と仮定できる. この時, $V = \{[z] \in \mathbb{P}^n; f(z) = 0\}$, $L_j = \{[z] \in \mathbb{P}^n; z_j = 0\}$ とし, $Y^* = \mathbb{P}^n \setminus V \cup L_1 \cup \dots \cup L_{n+1}$ とする. この場合, F^* は F^* 上の自由 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 作用を引いた覆起す. またその商空間は明らかに Y^* となる. 従って,

補題(2.2). (i) $\chi(Y^*) = \chi(F^*)/d$

(ii) $\pi_1(Y^*)$: 自由アーベル群, 階数 $n+1$ \iff $\pi_1(F^*)$: 自由アーベル群, 階数.

(iii) $\pi_i(Y^*) \cong \pi_i(F^*)$ ($1 < i < n$)

やはり (iii) のみが明らかではないが, これは Alexander 双対定理.

及び Lefschetz 双対定理を用いて証明される。(3)

3. 全域的非退化多項式

$g(u) = \sum_{j=1}^m b_j u^{a_j}$ を n 変数 u_1, u_2, \dots, u_n の (D -ラン) 多項式とする。 g の台 $S(g)$ を $b_j \neq 0$ なる D の張る凸包とコンパクトな多面体として定義する。 g が 大局的に非退化 とは、任意の辺 $E \in S(g)$ に対して、方程式 $g_E(u) = \frac{\partial g_E}{\partial u_1}(u) = \dots = \frac{\partial g_E}{\partial u_n}(u) = 0$ が $(\mathbb{C}^*)^n$ の中に解を持たない時をいう。今 $f(z)$ を $z = (z_1, \dots, z_m)$ の d 次斉次多項式とする時、 $\pi f(u) \in f(u_1, \dots, u_n, 1)$ で定義する。定義より明らかに

補題(3.1) 1. $f(z)$ が Newton 境界の内部で非退化 $\Leftrightarrow \pi f(u)$ が大局的に非退化. 2. $n!$ n -volume $S(\pi f) = (n+1)!(n+1)$ -volume $\Delta(0)$.

補題(2.2) 及び補題(3.1) より、定理(1.1) は次と同値。

定理(3.2). $g(u)$ が大局的に非退化な多項式とする。この時、

1. $\chi((\mathbb{C}^*)^n - g^{-1}(0)) = (-1)^n n!$ n -dim volume $S(g)$.
2. 更に、 $\dim S(g) = n$ とすれば、 $(\mathbb{C}^*)^n - g^{-1}(0)$ の基本群は階数 $n+1$ の自由アベル群で、その普遍被覆空間は、 $(n-1)$ 連結となる。

我々は以下に定理(3.2) の帰納的証明の方針をのべておく。
 $S(g)$ の頂点 ν が、効果的であるとは、 $S(g)$ の ν 以外の格子点の張る凸多面体が真に $S(g)$ より小さくなる時をいう。証明に

は効果的頂点の数に対する帰納法を用いる。一般的議論で、

μ^1, \dots, μ^m は全て効果的と仮定できる。 $m = n+1$ の時。

この場合は実は [4] の結果に帰着される。 $m > n+1$ の時、

必要があれば適当な Affine 変換 $g \rightarrow g_A$ を行えば、次のよ
うな vertex μ^m が見つけたせる。ただし A は \mathbb{Z} 上定義された

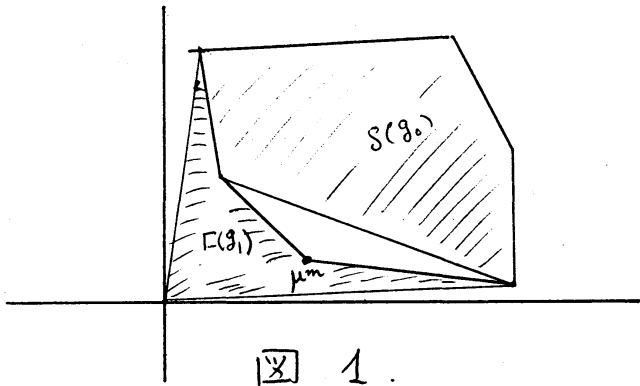
affine 変換で、 $g_A(u) = \sum_{j=1}^m b_j u^{j_j}$, $j_j = A \mu_j^j$ 。

(1) $S(g)$ の任意の辺の張る線形包絡空間は $S(g)$ の
時以外原点を通らぬ。

(2) 今 $g_t(u) = \sum_{j=1}^{m-1} b_j u^{j_j} + t b_m u^{\mu^m}$ で定義すれば、 $0 \leq t \leq 1$

と $\exists g_t(u)$ は大域的に非退化で、 $\Gamma(g_t) < \Gamma(g_0)$

より $S(g)$ の図の如くになる。



次の補題が最も重要である。

Lemma (3.3) 係数 $\{b_j\}$ を上手に選べば、 小さい t について

$t > 0$ のとき $(\mathbb{C}^*)^n$ に $n!$ 個の単純臨界点をもち $t \neq 0$ のとき

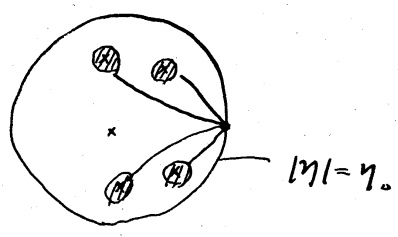
$t = 0$ のときは $n!$ 個の単純臨界点を $(\mathbb{C}^*)^n$ にもち、

またこれらの臨界値は零でない。 (ii) $t \rightarrow 0$ の時、

g_t の臨界点の $n! n$ -volume $S(g_t)$ は g_0 の臨界点に近づき、残りは原点に収束する。

Lemma (3.4) 超曲面の族 $\{g_t(\eta)\}$ ($0 \leq t \leq 1$) ($\eta \in \mathbb{C}^n$) は次の意味で一様に、原点中心の球面族 $S_R = \{u \in \mathbb{C}^n; \|u\| = R\}$ とコンパクト化される。 $\forall \epsilon > 0$ に対して、 $\exists R_0 > 0$, $\forall \eta$ ($\epsilon < |\eta| < \epsilon^{-1}$) と $\forall R, R \geq R_0$ に対して超曲面 $g_t(\eta)$ と S_R は $(\mathbb{C}^n)^n$ で横断的に交わる。

今節単の $S(g_t)$ は $\{x_i \geq 1; i=1, \dots, n\}$ に含まれると仮定しよう。上の補題 (3.4) は $g_t: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ が、特異ファイバーを添付し、local 自明ファイバー束となることを導く。 $\eta_0 \in g_0$ の n 個の異なる臨界値の絶対値より小さく固定する。 t が十分小さくすれば、 $0 < t \leq t_0$ に対して、 g_t の臨界値は、
 $D_{\eta_0}^c = \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| \neq \eta_0\}$ は $n! n$ -volume $S(g_t)$ を、
 $= \{\eta \in \mathbb{C}; |\eta| < \eta_0\}$ は $n! (n\text{-volume } S(g_t) - n\text{-volume } S(g_t))$ である。今 $Y_{\eta_0}(t) \subseteq g_t^{-1}(D_{\eta_0}^c)$ とすると、仮定と上の補題に依り、 $Y_{\eta_0}(0)$ と $Y_{\eta_0}(t_0)$ は diffeo である。一方 $Y_{\eta_0}(0)$ は明らか $(\mathbb{C}^n)^n - g_0^{-1}(0) = \mathbb{C}^n - g_0^{-1}(0)$ の T^*T^* - $X^1 \times X^2 \times \dots \times X^n$ のリットラウトである。今 D_{η_0} に入ると g_t の臨界点に次の様な path をとる



$\Gamma \in \partial D_{\eta_0}$ と先は小さい disk を \hookrightarrow つけた図形とする。 Γ は $\overline{D_{\eta_0}} - \{0\}$ の deformation retract と思えばよい。 一方 Γ の枝 $\text{---} \circlearrowleft \in \partial D_{\eta_0}$ には Γ を $g_t^{-1}(\partial D_{\eta_0} \cup \text{---} \circlearrowleft)$ におき、 $g_t^{-1}(\partial D_{\eta_0})$ は対応する臨界点 c の消滅球 S^{n-1} の錐を取るとして対応する。 したがって、 $(\mathbb{C}^*)^n - g_t^{-1}(c) \simeq g_{t_0}^{-1}(\Gamma) \cup Y_{\eta_0}(t_0)$ であり $Y_{\eta_0}(t_0)$ は $n! (n\text{-volume } S(g_1) - n\text{-volume } S(g_0))$ の n -cells を消滅する μ によりつけられる。 従って、

$$\chi(\mathbb{C}^{*n} - g_{t_0}^{-1}(c)) = \chi(\mathbb{C}^{*n} - g_0^{-1}(c)) + (-1)^n \cdot n! \{n\text{-volume } S(g_1) - n\text{-volume } S(g_0)\}$$

ここで $\pi_j(\mathbb{C}^{*n} - g_0^{-1}(c)) \rightarrow \pi_j(\mathbb{C}^{*n} - g_{t_0}^{-1}(c))$ は $j \leq n-2$ の同型、 $j = n-1$ の onto となり帰納法による。 詳しい証明は [3] を見よ。

§4. F の topology.

いままで F^* の topology のみを見ることができたが定理(1.1)の系として得られた F の位相的性質を見よう。 $I = \{1, \dots, n+1\}$ に対して、 $F_I^* \simeq f_I^{-1}(1) \cap (\mathbb{C}^*)^I$ ($f_I = f|_{\mathbb{C}^I}$; $\mathbb{C}^I = \{z \mid z_j = 0, j \in I\}$) として、 $d_I \simeq f_I$ の対応する重数とする。 以下 f は Th.(1.1) の仮定を満たす t の \mathbb{C}^I である。

定理(4.1). (i) $\chi(F) = (-1)^n \nu(\Delta(0)) + 1$. ($\nu(\Delta(0))$ は

$\Delta(0)$ の Newton 数.)

(ii) $\zeta(f; t) = \prod_{I \neq \emptyset} (1 - t^{d_I})^{-\chi(F_I^*)/d_I}$

$\Delta_{i_1 \dots i_k} \Sigma \Delta \cap \{x_j = 0; j = i_1, i_2, \dots, i_k\}$ で定義すれば,
 F の連結性の条件として,

定理 (4.2) (i) F : 単連結 $\Leftrightarrow \Delta_i \neq \emptyset$ ($i=1, \dots, n+1$)
(ii) $\exists s \in \mathcal{N}, \dim \Delta_{i_1 \dots i_s} > s - 2k$ 或全 2 の i_1, \dots, i_s で成立すれば, F は s -連結である。

References

- [1] Kouchnirenko, A.G. Polyedre de Newton et nombres de Milnor, Invent. math. 32 (1976), 1-31.
- [2] Oka, M. On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary. (to appear)
- [3] Oka, M. On the topology of the Newton boundary II, (to appear)
- [4] Oka, M. On the topology of the complement of a hypersurface in P^n , Quart. J. math. Oxford (2), 28 (1977), 229-242.
- [5] Milnor, J. Singular points of complex hypersurface, Annals of math. Studies 61, Princeton Univ. press. 1968.