数理解析研究所講究録
329巻 1978年 134-144

パネルディスカッション印象記

電気通信大学　牛島照夫

研究集会の二日目，1978年1月24日の午後4時から，

有限要素法　—現状と展望—

というテーマで，パネルディスカッションを行なった。その司会をお引き受けするにあたっては，現在とりくまれている問題の位置づけ（現状）とこれから発展する重要問題（展望）が鮮明に浮かび上がることを目指したいと考え，さらには，この共同研究の今後の方向附けの指針が得られることを期待していた。そこでパネルメンバーにあらかじめお願いしたテーマで話題を提供していただき，それをふまえて討論を行なった。

パネルメンバーと話題のテーマは，次のようであった（敬称略）。

藤田宏（東大・理）

IRIAシンポジウムなど

森正武（京大・数解研）

誤差の事後評価

山本善之（東大・工）

無限要素法

金山寛（富士ファコム制御）

シュミレーションにおける構造の近似

川井忠彦（東大・生研）

数学モデルと物理モデル

三村昌泰（甲南大・理）

パターン生成と離散近似

山口昌哉（京大・理）

有限要素法に託する夢

この話題提供の後，

伊理正夫（東大・工），金子幸臣（明大・工），菊地文雄（東大・宇航研），三好哲彦（熊本大・理），山田嘉昭（東大・生研），吉田裕（東工大・工），戸川隼人（日大・理工）

の諸氏の会場からの発言をまじえて活発な討論が行なわれた。

パネルメンバーと上記の諸氏の御協力に厚く感謝する次第である。

以下に，パネルメンバーの提供された話題の要旨をかかげ

よう。テープを頼りにまとめたものであるが、もとより完全なものではない。文責は全て私にあることをお断りしておく。

藤田宏氏：

ＩＲＩＡシンポジウムとは、昨１９７７年１２月にヴェルサイユで開かれた第三回応用科学と工学における計算法国際シンポジウム、のことである。ここでは、６０以上の講演発表があり盛況であった。これに出席して、偏微分方程式の数値解析および、これを手段として、現象を調べる場合には、我々は予断にみちた方法をとらねばならないとの感想をもった。原子炉の解析を行ない、計算結果を映画にし、現象との比較を報告している講演が印象深かった。この研究には、かなりの経費を要するものと思われる。我が国でも、このような大規模な仕事のできる研究機関があって欲しいと感じた。しかしながら、映画が計算結果にもとずいて作られたかどうかは、判定仕難いという思いもいだいた。講演者との信頼関係だけがたよりである。一方このようにやみくもに計算していく場面には数学の出番はないであろう。このような多量のデータの中に埋没してしまう現象を把握するためとか、経済性を高めるためとかに、数学の活躍の場を

期待したい。 数学的には、解の性質をとらえたかしこい方法や、漸近的方法が重要であろうし，応用の立場からは、実際現象にうまく見合うところを強調してとらえた方法を開発していくべきであろう。

森正武氏:

有限要素法における誤差評価として典型的なものは、代表的なメッシュ巾 h によって、$O(h^\alpha)$ の形で *a priori* に得られるものである。 これは、解析的には有用であるが誤差の見積もりには役立たない。 むしろ、$O(h)$ などの評価は、メッシュ巾 h をあまり小さくしてはいけないという警告と理解すべきだ。

そこで変分原理にもとずく *a posteriori* な誤差評価に関心をもっている。 これは、最小問題とこれに相対な最大問題を考え、両者の近似解で真の解を上と下からはさむことによって、問題にしている物理量や解そのものの誤差を評価する方法である。 変分法や構造力学において

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Complementary}\\ \text{Conjugate}\\ \text{Reciprocal}\\ \text{Dual}\end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l}\text{Variational}\\ \text{Energy}\end{array}\right\} \text{Principle}$$

というさまざまな名前で呼ばれているが、すべて同一の思想である。 有限要素法における混合法と密接な関係をもっている。 Oden の解説によれば、この方法は、まずLegendreによって、次にFriedrichsによって，さらに1940年代後半Hyper Circle 法として、そして現在有限要素法の誤差評価法として，4度び（再）発見されているとの事である。

参考文献として、

加藤敏夫　変分法　寺沢寛一編

自然科学者のための数学概論応用編 pp. 353－489.

Courant － Hilbert　Methods of Mathematical Physics Vol 1.

Aubin, J. P.　Approximation of Elliptic Boundary Value Problems. Chapt. 10, Conjugate Variational Principle.

などがある。

楕円型線型問題の誤差評価法として最も有望なものであるが、相対問題を含めて二つ解かなければならないこと、および、最大問題は、Friedrichs の言う degenerate case すなわち，附加条件つきの最適化問題になることが問題点である。 附加条件をみたさない要素さらには非適合要素を使って解いても、誤差評価としては十分役立つような場合もあ

る。 この事情を解明し，三好の仕事などから出発して整理し，*a posteriori* な誤差評価の具体的な方法を作り出すことはこれからの問題であると考えている。

山本善之氏：

（所用のため出席を取り止められ，代わって山本研究室の中野孝昭氏が，無限領域における境界値問題を重ねあわせ法によって数値計算した例をスライドによって紹介された。同法は，領域を二分し，外部領域では解析解を使用し，内部領域では，有限要素法などによって数値解を得る方法である。内部領域での境界条件は，外部解との接続条件から定められる。 定常波動問題，造波問題，粘性流体内の物体外の流れ解析の三例の計算結果が報告された。 ）

金山寛氏：

ここで発言したかったことは，田端氏の講演でのべられていることにつきる。 民間の立場からは，メッシュ巾を有限にとめたとき得られるスキームが，現象の本質的性質をみたしているか否かが重要である。 数学サイドからの研究は，スキームの収束性の研究に精力がおかれすぎているのではないか。

川井忠彦氏:

1. 現在の有限要素法を非線型問題に適用した場合に計算時間がかかりすぎるのが障害である。 定式化に発想の転換が必要である。 そこで、数学モデルから物理モデルへという標語になった。

2. 私のモデルを二次元三次元問題に適用すると、メッシュ分割の方法に敏感であることがわかる。 スプリングコンスタントをきめるときに差分の考えを使っているが、そこで使用する差分式が必ずしも適切でないのであろう。 最近私の研究室の学生が、Hellinger – Reisner の原理から差分式の Rational な Formula を導いた。 これにヒントを得て、連続体の変位場は本質的に hybrid であるということに思いいたった。 この変位場は定義式から剛体変位の場と歪の場の組みあわせである。 変位と応力の場になおすと、自由度は $6+6=12$ であり、要素行列は 12×12 で大きくなる。 ある法則で変位を消去できれば stress model であり、逆に応力を剛体変位で表わせれば displacement model である。 私のモデルは、この考えの延長線上にあることが解ってきた。 この考えをおし進めることによって、収束性等の数学的根拠がわかってくるのではないか。 さらに

Navier – Stokes 方程式の数値解法の不安定性の原因もつきとめられるのではないか。流れの場の大部分は，剛体変位の場であり，$\delta \ll d$ であり，数値としてのオーダーがまるで違うことに注目したい。固体力学の問題で，まだ有限要素法の適用がすすんでいないもの，たとえば，変位変形の極めて大きい風船のとりあつかいや，Rheology，高Reynolds 数の Navier – Stokes 方程式，生体現象などにおいては，変位場が hybrid であるという点に立ちかえって新たな工夫をする必要があると思う。

3．刺激的だが，脱微分方程式という標語をかかげてみる。移動現象を考えると，これは，拡散，熱，化学反応などが組みあわさった非線形の連立系であり，そのまゝ離散化するのでは手に負えない。物理学の基本は，質量，運動量，エネルギーなどの保存則である。この保存則の積分表示を離散化することの中に将来曙光が見い出されるのではないだろうか。この方針で，Simplified Mark and Cell 法と Frick 法を混用して，高Reynolds 数の Navier – Stokes 方程式を手がけているところである。

三村昌泰氏：

生物モデルの解析への有限要素法の応用と出会っている問

題点について述べる。問題は、二次元又は三次元の複雑な領域における生物の空間分布を調べることである。数学理論としては、Bifurcation Theory がある。基本経路からの分岐を調べることによって、空間的に非一様な解があるか否かを決定するときに、分岐が一意である，すなわち，単純固有値の場合は、分岐理論の適用が可能であるが、一意でない，すなわち，縮重固有値の場合には、現在使える数学的武器がないので、有限要素法が有効になってくる。空間移動は拡散であらわされ、生物間の接触は、非線型項であらわされる半線形方程式の非定常問題の極限として定常状態をもとめようとしており、計算結果は幾つか報告されている。数値的に得られる定常状態のパターンは、空間のきざみ巾に依存しているように観察される。あるきざみ巾で得られる定常状態と、きざみ巾を半分にしたときに得られる定常状態、とは全然似ていないことがある。このような計算法で、あるパターンが出現することは認めるとしても、どのパターンが正しいものかの判定は難かしい問題である。昨秋の New York での Bifurcation の会議に出席してこの感じを更に強くしている。

山口昌哉氏：

幾つかの要素から構成していく有限要素法という考え方を人間がどうして考え始めたのかを7,8年前から考えるようになり、その基本には細胞という考えがあると思うようになった。 この点から考えると現在の、いやその当時の有限要素法は実に単純で同種の要素のみしか用いていない。 生物では、異質のものがあり、細胞と細胞の境界も少し違ったものでできている。 このようなものをいれたFinite Elementを何故使わないのかと思っていたが、川井氏の講演をきき、やっとこの夢が少し実現されてきているような印象をうけた。細胞はもうこれ以上細分できないものだから、川井氏のモデルの場合でももうこれ以上細かくするという話はいらないという立場もあろう。 二つの問題点がはっきり浮かび上がる。一つは、構造を保存するというような、メッシュを細くしないときの方の数学的問題であり、他は、細くしていくときの誤差評価などの問題である。 経済性は何も考えていない数学一方の考えだが、細胞というものを一方に考えておけば、もっともっといろんな工夫ができるのではあるまいか。

会場からの発言は、漸近的手法による誤差の事後評価の重要性の指摘（伊理），流体力学における特異問題の処理の動向（金子），収束性によるスキームの分類（菊地），手がけ

たい重要問題（三好，山田），共同研究の将来への期待（吉田，戸川）などにわたっていたが，記録不備のため，残念ながら，要旨の紹介は割愛する。