

## Turning Point 型分岐の有限要素近似

東大宇宙研

菊地文雄

1. はじめに 非線形現象においては様々の型の分岐が現れる。したがって、そのような現象を有限要素法等により数値的に再現する必要が生じ、それに伴い近似解法で不可避な誤差の挙動、収束等に対する理論解析も実施されるようになった。自明な零解の経路からの分岐については Weiss の差合法<sup>[1]</sup>に対する研究があり、有限要素法については著者の考察<sup>[2]</sup>がある。より一般論的観点からは Atkinson の研究<sup>[3]</sup>が目につく。別に turning point 型分岐は、構造力学で飛移、屈伏として知られているように、安定限界の形態として極めて popular なものである。この種の分岐の数値計算の理論解析には Simpson の差合法に対する研究<sup>[4,5]</sup>があるが、若干強い仮定の下に展開されているようである。ここでは turning point 型の分岐についてモデル問題を考へ、その有限要素近似について誤差挙動等の基礎的考察の結果を示す(証明の詳細は[6]に発表予定、概要は[7]に発表済み)。なお分岐現象の有限要素近似の理論的考察には、Yamaguti-Fujii の優れた研究<sup>[8]</sup>があり、

以下の結果も関連し含まれる部分も多い。また Keller の研究<sup>[9]</sup>も分岐解の構成に関し重要な情報を与えている。

## 2. 準備と連続問題

$\Omega$  を  $\mathbb{R}^n$  ( $n=1, 2, 3$ ) の有界領域とし、簡単のため凸多面体 (99 角形) 状とする。 $\lambda$  を実パラメータとし、次の  $u = u(x)$  ( $x = (x_1, \dots, x_n)$  は  $\mathbb{R}^n$  の点) に関する半線形境界値問題を考へる。

$$-\Delta u = \lambda f(u) \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \quad (1)$$

$\Delta$  は Laplacian,  $\partial\Omega$  は  $\Omega$  の境界,  $\lambda$  は実パラメータ, さらに  $f$  は実関数で  $\mathbb{R}^1$  上で 2 回連続的微分可能, かつ次の意味で 2 階導関数が Lipschitz 連続とする。

$$|f''(t_1) - f''(t_2)| \leq C |t_1 - t_2| \quad (2)$$

ただし  $t_1, t_2 \in [-t_0, t_0]$  で,  $C$  は正数  $t_0$  には依存し得るが, 一度  $t_0$  を固定すれば  $t_1, t_2$  には依存しない正定数である。

問題 (1) を弱形式で表わす: 次式を満たす対  $\{\lambda, u\} \in \mathbb{R}^1 \times X$  を見出せ。

$$\langle u, \bar{u} \rangle = \lambda (f(u), \bar{u}) \quad \text{for all } \bar{u} \in H_0^1(\Omega) \quad (3)$$

ここで  $X = H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  は  $\| \cdot \|_{H_0^1(\Omega)} + \| \cdot \|_{C(\bar{\Omega})}$  なるノルムを備えた Banach 空間とし, また

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v \, dx, \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n (\partial u / \partial x_i, \partial \bar{u} / \partial x_i) \quad (4)$$

いま (3) を満たす  $\{\lambda_0, u_0\} \in \mathbb{R}^1 \times X$  なる実が見出されたとき

る。この点 臨界点 であるとは、非零関数  $\phi \in X$  が存在して次式を満足することである。

$$\langle \phi, \bar{u} \rangle - \lambda_0 (f_u(u_0)\phi, \bar{u}) = 0 \quad \text{for all } \bar{u} \in H_0^1(\Omega) \quad (5)$$

ただし  $f_u$  は  $f$  の  $u$  に関する (Fréchet) 導関数である。すなわち  $\{\lambda_0, u_0\}$  における (3) に関連する線形化作用素は零固有値を持つ。ここでは考えている零固有値は 単純 (非縮重) であるとし、 $\phi$  として  $(\phi, \phi) = 1$  なるものを 1 つ選び固定する。さらに次の仮定を採用する。

$$(i) \alpha_1 \equiv (f(u_0), \phi) \neq 0 \quad (ii) \alpha_2 \equiv - \frac{(f_{uu}(u_0)\phi^2, \phi)}{\alpha_1} \neq 0 \quad (6)$$

これらの仮定は考えている臨界点の特徴付けに必要である。

以下では、このような性質を有する臨界点を 1 つ固定して考えるものとする。

$\{\lambda_0, u_0\}$  の近傍において (3) を満す  $\{\lambda, u\} \in \mathbb{R}^1 \times X$  (存在するものとして) を考える。  $u$  を次の形に書ける。

$$u = u_0 + \varepsilon\phi + v \quad ; \quad \varepsilon = (u - u_0, \phi), \quad (v, \phi) = 0 \quad (7)$$

(7) を (3) に代入し整理する。次式が成立しなければならない。

$$\begin{aligned} \langle v, \bar{u} \rangle - \lambda_0 (f_u(u_0)v, \bar{u}) \\ = (\lambda f(u) - \lambda_0 f(u_0) - \lambda_0 f_u(u_0)(u - u_0), \bar{u}) \end{aligned} \quad (8)$$

上式は  $v$  に関する方程式とみなし得る。上式が  $v$  について可解であるためには、右辺が  $\phi$  と直交しなければならない。

この可解条件から次式を得る。

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_0 (f(u_0) + f_u(u_0)(u - u_0) - f(u), \phi) / (f(u), \phi) \quad (9)$$

ただし分母は0でないとする。(6-i)より,  $u$ が $u_0$ に近ければ, (9)の分母は0にならない。(9)を利用した簡単な考察により,  $\mathbb{R}^1 \times X$ に属する $\{\lambda_0, u_0\}$ の十分小さな近傍では,  $u$ を(7)の形に書いた時,  $\psi$ は $\varepsilon$ の関数とみて一意であり,  $\varepsilon$ 中に比較して微小(実は $\varepsilon^2$ のオーダー)であることがわかる。この点を考慮して $u$ を $\varepsilon$ の関数として構成することを考える。(9)を利用すれば,  $\lambda$ も $\varepsilon$ の関数とみなせる。

(注意)  $\{\lambda_0, u_0\}$ が臨界点でなければ,  $u$ を $\lambda$ の関数として(局所的に)構成できる。しかし臨界点では必ずしもそうはいかない。上記のように,  $\varepsilon$ をパラメータとして $u$ の支配項を指定し, 残りの $\psi$ を定めるのが自然である。この事実はNewton法の収束とも密接に関連している。////

以上の目的には陰関数定理を用いればよい。その結果のみを要約しておこう。 $\varepsilon_0$ を十分小さい正定数に選べば, 考えている $\psi(\varepsilon)$ は $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ で $\varepsilon$ に属し $X$ (3節で述べる仮定下で $H^2(\Omega)$ でも)で2階連続的微分可能で, かつ

$$\left\| \frac{d^2 \psi}{d\varepsilon^2}(\varepsilon_1) - \frac{d^2 \psi}{d\varepsilon^2}(\varepsilon_2) \right\|_X \leq C |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \quad (10)$$

ただし $|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq \varepsilon_0$ ,  $C$ は $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ に依存しない正定数であ

る。(10) は  $v$  の  $\varepsilon$  に関する 2 階導関数が Lipschitz 連続であることを意味している。さらに

$$v(0) = 0, \quad dv/d\varepsilon(0) = 0 \quad (11)$$

$\lambda(\varepsilon)$  については,  $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$  において  $\varepsilon$  に対し 2 回連続的微分可能で, さらに  $d^2\lambda/d\varepsilon^2$  は Lipschitz 連続となる。また,

$$\lambda(0) = \lambda_0, \quad d\lambda/d\varepsilon(0) = 0, \quad d^2\lambda/d\varepsilon^2(0) = \alpha_2 \neq 0 \quad (12)$$

したがって  $|\varepsilon|$  が小さい部分では  $\lambda(\varepsilon)$  のグラフは  $\{\varepsilon, \lambda\} = \{0, \lambda_0\}$  を頂点とする放物線にほとんど一致し,  $\varepsilon - \lambda$  曲線には turning point が現れる。 $\{\lambda_0, u_0\}$  の微小近傍には, 同一の  $\lambda$  に対し二つ以上の  $\{\lambda, u\} \in \mathbb{R}^1 \times X$  が (3) の解となるような  $\varepsilon$  が無数に存在するから,  $\{\lambda_0, u_0\}$  は一種の 分岐点 とみなせる。(図 1 参照)

### 3. 有限要素近似

$\Omega$  を  $(n+1)$  単体の集合とみなして分割する。 $\Omega$  が多面体形状ゆえ,  $\Omega$  は過不足なく有限要素分割できる。有限要素近似関数としては連続な区分 1 次式を考える。すなわち最も単純かつ popular な近似である。

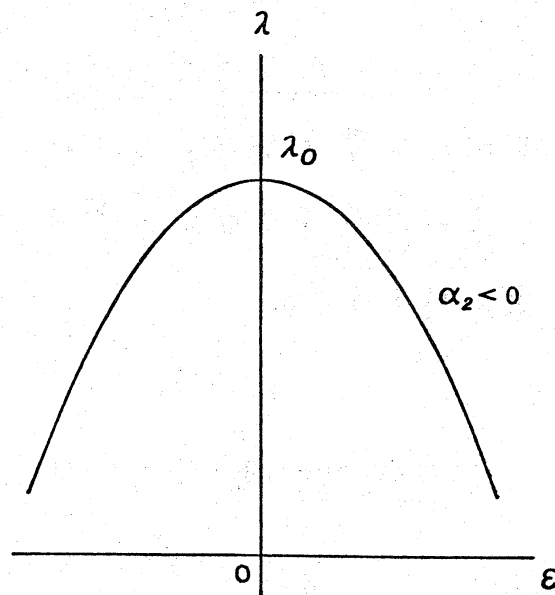


図 1  $\lambda - \varepsilon$  曲線の概形

容易に  $X$  の部分空間として有限要素空間  $X^h$  を考えることができる。要素分割は *regular* か *quasi-uniform* とする。すなわち、単体要素は平らすぎず、要素の大きさは考えている各分割においては同程度とする。代表的要素寸法を  $h$  と記す。

次の連結問題およびその有限要素近似を考える： $g \in L_2(\Omega)$  に対し、次式を満たす  $u \in X$ ,  $u_h \in X^h$  を見出せ。

$$\langle u, \bar{u} \rangle = (g, \bar{u}) \quad \text{for all } \bar{u} \in H_0^1(\Omega) \quad (13)$$

$$\langle u_h, \bar{u}_h \rangle = (g, \bar{u}_h) \quad \text{for all } \bar{u}_h \in X^h \quad (14)$$

ここで (13) に対して次の結果を要請 (仮定) する。 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset X$  ( $n \leq 3$  に注意) かつ

$$\|u\|_2 \leq C \|g\|_0 \quad (15)$$

$\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_2$  はそれぞれ 0 次および 2 次のソボレフ・ノルムである。上記の結果は無制限には成立しない。  $\Omega$  の形状に関する制限が必要である。(13) の  $u$ , (14) の  $u_h$  はそれぞれ  $X, X^h$  に一意に存在することが従う。そして両者の差に関して次の結果が得られる。

$$\|u_h - u\|_\alpha \leq Ch^{2-\alpha} \|g\| \quad (\alpha = 0, 1) \quad (16)$$

$$\sup_x |u_h(x) - u(x)| \leq Ch^{2-n/2} \|g\| \quad (17)$$

ただし  $\|\cdot\|_1$  は 1 次のソボレフ・ノルムである。

我々の興味は  $\{\lambda_0, u_0\}$  の近くで  $\{\lambda_h, u_h\} \in \mathbb{R}^1 \times X^h$  として、

(3) の近似である次式を満たすものを見出すことである。

$$\langle u_h, \bar{u}_h \rangle = \lambda_h (f(u_h), \bar{u}_h) \quad \text{for all } \bar{u}_h \in X^h \quad (18)$$

その目的のため、 $u_0$  の近似として  $u_{h0} \in X^h$  を次式で定める。

$$\langle u_{h0}, \bar{u}_h \rangle = \lambda_0 (f(u_0), \bar{u}_h) \quad \text{for all } \bar{u}_h \in X^h \quad (19)$$

次に  $\phi$  の近似  $\phi_h \in X^h$  を次の固有値問題を解いて定める。

$$\langle \phi_h, \bar{u}_h \rangle - \lambda_0 (f_u(u_0)\phi_h, \bar{u}_h) = v_h(\phi_h, \bar{u}_h) \quad \text{for all } \bar{u}_h \in X^h \quad (20)$$

$h$  が十分に小であれば、 $\|\phi_h\|_0 = 1$ ,  $(\phi_h, \phi) \geq 0$  を満たし、

$\phi_h$  は  $\phi$  に、 $v_h$  は 0 に十分に近く、しかも固有値  $v_h$  は 単純

であるように選ぶ：

$$\|\phi_h - \phi\|_\alpha \leq Ch^{2-\alpha} \quad (\alpha = 0, 1), \quad |v_h| \leq Ch^2 \quad (21, 22)$$

$$\sup_x |\phi_h(x) - \phi(x)| \leq Ch^{2-n/2} \quad (23)$$

(7) を参考にして、(18) の解  $u_h \in X^h$  を次の形で表わす。

$$u_h = u_{h0} + \varepsilon \phi_h + v_h \quad ; \quad \varepsilon = (u_h - u_{h0}, \phi_h), \quad (v_h, \phi_h) = 0 \quad (24)$$

連続問題の場合同様、 $|\varepsilon|$  が十分小さい部分で  $v_h$  を  $\varepsilon$  の関数として構成できればよい。(8) 式に対処して次式を考える。

$$\begin{aligned} \langle v_h, \bar{u}_h \rangle - ((\lambda_0 f_u(u_0) + v_h)v_h, \bar{u}_h) \\ = (\lambda_h f(u_h) - \lambda_0 f(u_0) - (\lambda_0 f_u(u_0) + v_h)(u_h - u_{h0}), \bar{u}_h) \end{aligned} \quad (25)$$

(8) 式に対する考察同様、上式の可解性の条件として次式を得る。

$$\lambda_h = \lambda_0 + \frac{(\lambda_0 f(u_0) + (\lambda_0 f_u(u_0) + v_h)(u_h - u_{h0}), \phi_h)}{(f(u_h), \phi_h)} \quad (26)$$

(25), (26) を基礎式として、陰関数定理により  $v_h(\varepsilon)$  を構成で

きる。但し、 $|\varepsilon|$ が十分に小さければ、 $v_h(\varepsilon)$ は $\varepsilon$ の( $X^h$ への)関数として2回連続的微分可能であり、かつ(10)と同様な意味で $v_h$ の2階導関数 $d^2v_h/d\varepsilon^2$ はLipschitz連続である。 $\lambda_h$ も $\varepsilon$ に關し2回連続的微分可能であり、かつ $d^2\lambda_h/d\varepsilon^2$ はLipschitz連続である。

#### 4. 誤差評価

以上により考えている分岐点のまわりで、連続問題と近似(離散)問題について、解の経路を定めることができた。我々は近似解が連続問題の解を良好に近似していることを願うものであるが、実際にそうであることを示すためには、誤差評価を実施する必要がある。特に近似解で *turning point* が再現されることを示す必要がある。

$|\varepsilon|$ が小さいとき、共通の $\varepsilon$ に対し $u_h(\varepsilon)$ と $u(\varepsilon)$ の間の誤差、あるいは $\lambda_h(\varepsilon)$ と $\lambda(\varepsilon)$ の間の誤差を評価できる。その手順はかなり複雑ではあるが、結果のみを示すと次のようになる。

$$\|d^\beta v_h/d\varepsilon^\beta(\varepsilon) - d^\beta v/d\varepsilon^\beta(\varepsilon)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq Ch^{2-n/2} \quad (27)$$

$$\|d^\beta v_h/d\varepsilon^\beta(\varepsilon) - d^\beta v/d\varepsilon^\beta(\varepsilon)\|_\alpha \leq Ch^{2-\alpha} \quad (28)$$

$$|d^\beta \lambda_h/d\varepsilon^\beta(\varepsilon) - d^\beta \lambda/d\varepsilon^\beta(\varepsilon)| \leq Ch^2 \quad (29)$$

ただし $\beta = 0, 1, 2$ ,  $\alpha = 0, 1$ 。また $h$ は十分小さいものとする。



### 5. 近似解における turning point の再現

まず (29) および  $\lambda(\varepsilon)$  に関する結果 (例えば (12) など) を使えば,  $h$  が十分小なるとき,  $\lambda_h(\varepsilon)$  のグラフは  $\varepsilon = 0$  の近くでほとんど放物線状で, ある  $\varepsilon = \varepsilon_c$  ( $|\varepsilon_c| \leq Ch^2$ ) において頂点を持つ, すなわち  $d\lambda_h/d\varepsilon(\varepsilon_c) = 0$  であることがわかる。(29) より,  $\varepsilon = 0$  の近くでは  $\lambda_h(\varepsilon)$  のグラフの凹凸は元のグラフの凹凸と一致することもわかる。 $\{\lambda_h^c, u_h^c\} = \{\lambda_h(\varepsilon_c), u_h(\varepsilon_c)\}$  を考えると, これは (5) と対応する意味で (18) の 臨界点 となっている。すなわち,  $\phi_h^c = du_h/d\varepsilon(\varepsilon_c)$  とおくと,  $\phi_h^c$  は次式を満たす。

$$\langle \phi_h^c, \bar{u}_h \rangle - \lambda_h^c (f_u(u_h^c) \phi_h^c, \bar{u}_h) = 0 \quad \text{for all } \bar{u}_h \in X^h \quad (30)$$

この零固有値が単純であること, 近くに他の臨界点がないこともわかる。

### 6. 数値計算法

3 節において近似解を構成する際に, 解を (24) の形で表わし, (25), (26) を考えた。これは理論的に便利なものという観点から,  $u_0, \lambda_0, u_{h0}, \phi_h$  のような実際には計算し難いものを採用したのであるが, これらに代る近似を見出すことができれば, 基本的には同様な構成法を実際の計算に使用することもできる。

まず何らかの方法で  $\{\lambda_0, u_0\}$  の近似として  $\{\lambda^*, u_h^*\} \in$

$\mathbb{R}^1 \times X^h$  を見出す。そして (20) の代りに次の固有値問題を考える。 $(\phi_h^* \in X^h)$

$$\langle \phi_h^*, \bar{u}_h \rangle - \lambda^* (f_u(u_h^*) \phi_h^*, \bar{u}_h) = v_h^*(\phi_h^*, \bar{u}_h) \quad \text{for all } \bar{u}_h \in X^h \quad (31)$$

$\{\lambda^*, u_h^*\}$  が  $\{\lambda_0, u_0\}$  に近ければ、 $v_h^*$  を十分零に近く、 $\phi_h^*$  を  $\phi$  (あるいは  $\phi_h$ ) に近くとれる。その上で解  $u_h$  を (24) に対応して次の形に表わす。

$$u_h = u_h^* + \varepsilon \phi_h^* + v_h \quad ; \quad \varepsilon = (u_h - u_h^*, \phi_h^*) \quad , \quad (v_h^*, \phi_h^*) = 0 \quad (32)$$

こうすれば (25), (26) の代りの式を得ることが出来る。これらの式は  $v_h^*$  を  $\varepsilon$  の関数として陰に定義するから、一度に解くことは出来ないが、単純な反復法を利用するならば、比較的容易に解を求められる。

### 7. 数値計算例

以上の理論の妥当性を検討するため、若干の数値実験を実施した。次の三つの問題を扱う。

(A)  $n = 1$ ,  $\Omega =$  単位線分 ( $|x_1| < 1/2$ ),  $f(u) = e^u$

(B)  $n = 2$ ,  $\Omega =$  単位正方形 ( $|x_i| < 1/2, i = 1, 2$ ),  $f(u) = e^u$

(C)  $n = 2$ ,  $\Omega =$  単位正方形,  $f(u) = 1 + (u + u^2/2)/(1 + u^2/100)$

(B), (C) は Simpson の扱った問題と同一である。<sup>[4, 5]</sup>

(A) については  $\Omega$  を  $N$  要素に等分する。  $h = 1/N$  とする。また (B) と (C) に対しては  $N \times N$  の正方形双 1 次式要素に様に分割した。この場合も  $h = 1/N$  とする。なおここでは

対称性のある解のみを考へることとし、 $n=1$ については半分の領域、 $n=2$ に対しては $1/4$ 領域のみを扱った。

$n=2$ では双1次式要素を使っているが、その誤差解析は単体要素の場合とほとんど同じである。以下の数値例を得るためには、6節で説明した手法を採用し、すべて $\{\lambda^*, u_n^*\} = \{0, 0\}$ として計算した。反復計算はかなり広い範囲の $\varepsilon$ の値に対し、十分に安定であった。

問題(A) 図2に $N=40$ での数値解と厳密解による $\lambda-u(0)$ 曲線を示す。両者はほぼ一致しており、分岐点は数値的に再現された。図3には $\lambda_{ho}-\lambda_0$ と $N$ との関係を示す。 $\lambda_{ho}$ は数値

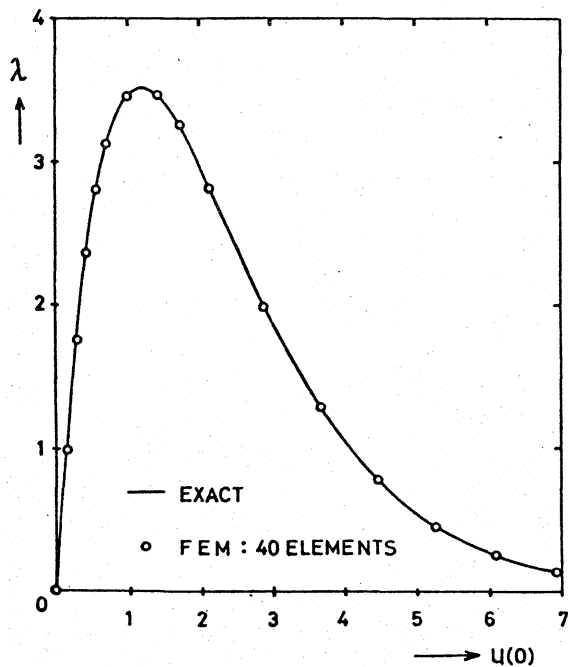


図2 問題(A)の $\lambda-u(0)$ 曲線

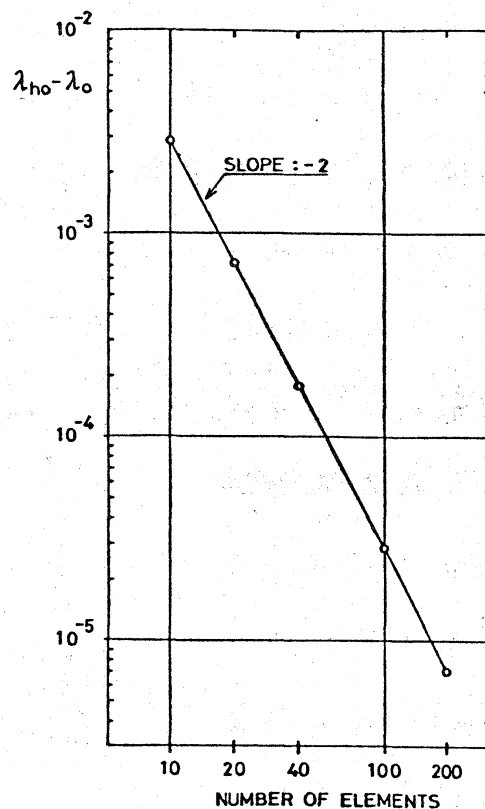


図3  $\lambda_0$ の収束の様子

解での臨界値である。実験的に  $\lambda_{ho} - \lambda_0 \propto h^2$  がわかるが、これは (29) と consistent な関係である。

問題(B) 図4に40×40分割での  $\lambda - u(0)$  曲線を示す。

問題(A)と同様、一つの最大点が見出される。

問題(C) 同様に図5には40×40分割での問題(C)に対する  $\lambda - u(0)$  曲線を示した。極大点と極小点が見出される。

後の2つの問題は2次元問題であり、厳密解の陽な表示は得られない。

しかし数値実験的には分岐点の存在は確認されている。その例としては Simpson の計算例が存在する。

なお本計算結果

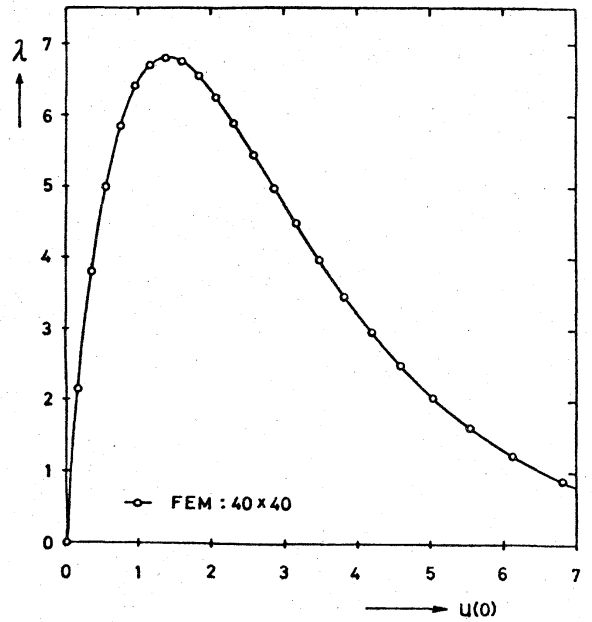


図4 問題(B)の  $\lambda - u(0)$  図

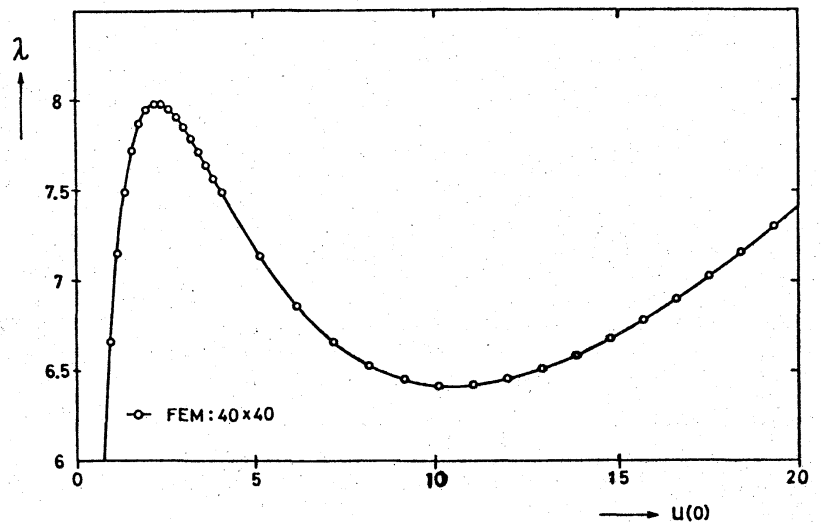


図5 問題(C)の  $\lambda - u(0)$  図

[4, 5]

と Simpson の結果とはほぼ一致している。

## 8. 結言

最近、関数解析的手法を応用することにより、分岐現象の数値解析に対し、理論的な考察の実施が可能になった。ここではそのような話題の一部の概要を紹介した。すなわち、数値計算により分岐点再現できること、また誤差評価が得られることなどである。今後さらに理論を発展させていきたい。

## REFERENCES

- (1) R. Weiss: Bifurcation in difference approximation to two-point boundary value problems, *Math. Comp.* 29 (1975) 746-760.
- (2) F. Kikuchi: An iterative finite element scheme for bifurcation analysis of semi-linear elliptic equations, ISAS Report, No. 542
- (3) K.E. Atkinson: The numerical solution of bifurcation problem, *SIAM J. Num. Anal.* 14 (1977) 584.
- (4) R.B. Simpson: A method for numerical determination of bifurcation states of nonlinear systems of equations, *SIAM J. Num. Anal.* 12 (1975) 439-451.
- (5) R.B. Simpson: Existence and error estimates for solutions of a discrete analog of nonlinear eigenvalue problems, *Math. Comp.* 26 (1972) 190-211.
- (6) F. Kikuchi: Numerical analysis of the finite element method applied to bifurcation problems of turning point type, to appear.
- (7) F. Kikuchi: Finite element approximations to bifurcation problems of turning point type, *Proc. 3rd International Symposium on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering* (1977).
- (8) M. Yamaguti and H. Fujii: On numerical deformation of singularities in nonlinear elasticity, *ibid* (1977).
- (9) H.B. Keller: Constructive methods for bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, *ibid* (1977).