数理解析研究所講究録
329巻 1978年 78-84

有限要素法による保存的上流スキームについて

三菱重工　馬場金司
京大・理　田端正久

序. Ωを滑らかな境界Γを持つ$\mathbb{R}^2$の有界領域として次の流れ場に於ける拡散方程式を考える:

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \mathbf{b}\cdot\nabla u + f & (x,t)\in Q=\Omega\times(0,T), \\ \dfrac{du}{d\nu} = 0 & (x,t)\in\Sigma=\Gamma\times(0,T), \\ u = u^0 & x\in\Omega,\ t=0. \end{cases}
$$

ここに, dは正定数, $\mathbf{b}=(b_1(x), b_2(x))$は与えられた流れ, νはΓでの外向き単位法線ベクトル, $f=f(x,t)$と$u^0=u^0(x)$は与えられた連続関数でそれぞれ外力と初期状態を示す。流れ$\mathbf{b}$が

$$
(2)\qquad \operatorname{div}\mathbf{b}=0 \quad x\in\Omega, \qquad \mathbf{b}\cdot\nu=0 \quad x\in\Gamma,
$$

を満たしているとする。その時, $f=0$に対応する(1)の(滑らかな)解$u(x,t)$は全質量を保存し, i.e.,

$$
(3)\qquad \int_\Omega u(x,t)\,dx = \text{const.} \qquad \forall t.
$$

同時に, 最大値原理を満たす, i.e.,

$$(4) \qquad \min_{x\in\overline{\Omega}} u^0(x) \le u(x,t) \le \max_{x\in\overline{\Omega}} u^0(x) \qquad \forall(x,t)\in Q,$$

ことは容易にわかる。我々の目的は d が小さいときでも有効な上流型有限要素近似で，(3)と(4) に対応する discrete conservation law と discrete maximum principle を同時に満たす(1)の近似スキームを提案しその近似解の厳密解への一様収束性を示すことである。

Discrete maximum principle を満たす有限要素近似は、Ciarlet-Raviart [2]，Fujii [3] によって実現され，更に上流型有限要素近似を用いて Tabata [6]，擬似粘性項を用いて Kikuchi [5] により，d が小さいときにも有効なスキームが示された。Discrete conservation law については、著者の知る限りにおいて有限要素法に関する文献を見いだしていない。(差分法では空間一次元のとき Gorenflo [4] の結果がある。)

ここでは，b が t に依存しない場合のみ論じるが，t に依存する場合には，一様収束を $L^2(0,T;H^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ での収束に変更すれば同じ結果が得られる (cf. Baba-Tabata [1])。

§1．保存的上流有限要素近似

$\mathcal{T}_h=\{T_j\}$ を Ω の regular かつ acute type の三角形分割とする，つまり，分割によらないある正定数 θ_0 が存在してすべての T_j の任意の角 θ に対して $\theta_0 \le \theta \le \pi/2$ が成立する。N_p を全節点数，h をすべての三角形の最大辺長，κ をすべての

三角形の最小垂線長とする。Ωの近似領域Ω_hを$\overline{\Omega}_h=\bigcup_j T_j$で定義しその境界を$\Gamma_h$とする。$V_h$を$\overline{\Omega}_h$で連続，各要素上一次の多項式である関数の全体，$\phi_{ih}(x)$，$i=1,\dots,N_p$，をその基底関数とする，$\phi_{ih}(P_j)=\delta_{ij}$。$\overline{\phi}_{ih}(x)$，$i=1,\dots,N_p$，を節点$P_i$での重心領域$D_i$の特性関数，$\tau$を時間刻み，$N_T=[T/\tau]$とする。線形作用素 $I_h: C(\overline{\Omega}_h)\to V_h$，$-: V_h\to L^2(\Omega_h)$ を次式で定義する：

$$I_h v=\sum_{i=1}^{N_p} v(P_i)\phi_{ih}\quad (v\in C(\overline{\Omega}_h)),\quad \overline{v}_h=\sum_{i=1}^{N_p} v_h(P_i)\overline{\phi}_{ih}\quad (v_h\in V_h).$$

(1)に対応する我々の有限要素スキームは$\{u_h^k\}_{k=0,\dots,N_T}\subset V_h$を求める次式である：

$$(5)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{u_h^{k+1}-u_h^k}{\tau},\phi_h\right)_h=-d\,a_h(u_h^k,\phi_h)-b_h(u_h^k,\phi_h)+(f(k\tau),\phi_h)_h \\ u_h^0=I_h u^0 \qquad\qquad \forall\phi_h\in V_h,\ k=0,1,\dots,N_T-1, \end{cases}$$

ここに，$(\ ,\ )_h$，$a_h(\ ,\ )$，$b_h(\ ,\ )$は$V_h\times V_h\to\mathbb{R}$への双一次形式で次式で定義される．

$$(u_h,v_h)_h=\int_{\Omega_h}\overline{u}_h\overline{v}_h\,dx,\quad a_h(u_h,v_h)=\int_{\Omega_h}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\,dx,$$

$$b_h(u_h,v_h)=\sum_{i=1}^{N_p}v_h(P_i)\sum_{j\in\Lambda_i}\gamma_{ij}\{H(\gamma_{ij})u_h(P_i)+(1-H(\gamma_{ij}))u_h(P_j)\},$$

ここに，

$$\Lambda_i=\{j\ ;\ P_j \text{ は } P_i \text{ と隣接している}\},$$

$$\gamma_{ij}=\int_{\Gamma_{ij}} b(s)\nu_{ij}(s)\,ds,$$

$$\Gamma_{ij}=\begin{cases}\partial D_i\cap\partial D_j & P_i,P_j\text{ の少なくとも一方が }\Omega_h\text{ 内にあるとき},\\ \partial D_i\cap\partial D_j\cap\Omega\text{ 又は} & \\ \partial D_i\cap\partial D_j\text{ を }\Gamma\text{ まで延長したもの} & P_i,P_j\in\Gamma_h\text{ のとき},\end{cases}$$

ν_{ij} = Γ_{ij} での D_i から D_j へ向う単位法線ベクトル，

$H(x)$ = Heaviside 関数

である。

定理. 三角形分割 $\{\mathcal{T}_h\}$ は regular かつ acute type であり

(6) $\tau \le \kappa^2/(3d+4\kappa\|b\|)$，$\|b\| = \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} \{b_1(x)^2 + b_2(x)^2\}^{\frac{1}{2}}$，

が満たされているとする。そのとき，(1)の解 u が滑らか（$u \in C^{1+1,1}(\overline{Q}) \cap C^{2+1,0}(\overline{Q}) \cap C^{0,1+0.5}(\overline{Q})$）なら (5)の解 u_h^k は u に $O(h)$ で一様収束する，

(7) $$\max_{x\in\overline{\Omega},\, k=0,\cdots,N_T} |u_h^k(x) - u(x,k\tau)| \le c\,h,$$

ここに，c は h，τ に無関係な正定数である。

更に，もし $f=0$ なら u_h^k は discrete maximum principle

(8) $$\min_{x\in\overline{\Omega}} u_h^0(x) \le u_h^k(x) \le \max_{x\in\overline{\Omega}} u_h^0(x), \quad k=0,1,\cdots,N_T$$

と，discrete conservation law

(9) $$\int_{\Omega_h} \overline{u}_h^k(x)\,dx = \text{const}, \qquad k=0,1,\cdots,N_T,$$

を満足する。

ただし，$C^{1+1,1}(\overline{Q})$，$C^{2+1,0}(\overline{Q})$，$C^{0,1+0.5}(\overline{Q})$ はそれぞれ，D_xD_tu，D_x^2u が x に関して $\overline{Q}$ で Lipschitz 連続，D_tu が t に関して $\overline{Q}$ で指数 0.5 の Hölder 連続なる関数の全体を示す。

注意. a_h，b_h ともに local consistency を持たない，つまり

$$\frac{a_h(I_hu, \phi_{ih})}{(1,\phi_{ih})_h} \not\to \Delta u(P_i), \quad \frac{b_h(I_hu, \phi_{ih})}{(1,\phi_{ih})_h} \not\to b\cdot\nabla u(P_i)$$

$h \to 0$.

§2. 定理の証明

$a_{ij} = a_h(\phi_{jh}, \phi_{ih})$, $b_{ij} = b_h(\phi_{jh}, \phi_{ih})$, $m_{ii} = (1, \phi_{ih})_h$ とおく。

補題. 条件(6)の下で次式が成立する.

(i) $0 \leq a_{ii}/m_{ii} \leq 3/\kappa^2$, $0 \leq b_{ii}/m_{ii} < 4\|b\|/\kappa$, $i=1,\dots,N_p$,

$$a_{ij},\ b_{ij} \leq 0 \qquad i \neq j.$$

(ii) $$\sum_{j=1}^{N_p} a_{ij} = \sum_{j=1}^{N_p} b_{ij} = 0 \qquad i=1,\dots,N_p.$$

(iii) $$\sum_{i=1}^{N_p} a_{ij} = \sum_{i=1}^{N_p} b_{ij} = 0 \qquad j=1,\dots,N_p.$$

証明. (ii) の b_{ij} についてのみ示す。b_{ij} の定義から

$$b_{ii} = \sum_{k\in\Lambda_i} \gamma_{ik} H(\gamma_{ik}), \quad b_{ij} = \sum_{k\in\Lambda_i} \gamma_{ik}(1-H(\gamma_{ik}))\delta_{jk} \quad (i \neq j),$$

なので.

$$\sum_{j=1}^{N_p} b_{ij} = \sum_{k\in\Lambda_i} \gamma_{ik} H(\gamma_{ik}) + \sum_{j\neq i}\sum_{k\in\Lambda_i} \gamma_{ik}(1-H(\gamma_{ik}))\delta_{jk}$$

$$= \sum_{k\in\Lambda_i} \gamma_{ik} H(\gamma_{ik}) + \sum_{k\in\Lambda_i} \gamma_{ik}(1-H(\gamma_{ik}))$$

$$= \sum_{k\in\Lambda_i} \gamma_{ik}$$

が得られる。$P_i \notin \Gamma_h$ のときは最後の式は $\int_{\partial D_i} b\nu\, ds = 0$ ((12)による) となる。$P_i \in \Gamma_h$ のときも境界付近での γ_{ik} の定義と(12)により 0であることがわかる。

さて、(1)に対応する次の楕円型問題を考える:

$$(10) \quad \begin{cases} -d\Delta v + \nabla\cdot bv + \mu v = f & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \Gamma. \end{cases}$$

ここに、μ はある正定数 $\mu_0(d, \|b\|)$ より大きい定数であり、$f = f(x)$ は与えられた連続関数である。次の有限要素スキーム

で (10) の近似解 $v_h \in \bar{V}_h$ を求める：

(11) $\quad d\, a_h(v_h, \phi_h) + b_h(v_h, \phi_h) + \mu(v_h, \phi_h)_h = (f, \phi_h)_h \quad \forall \phi_h \in \bar{V}_h.$

命題. 三角形分割は Regular かつ acute type であるとする。(10) の解 v が滑らか ($v \in C^2(\bar{\Omega})$) なら、(11) の解 v_h は (10) の解に $O(h)$ で一様収束する。

証明. 注意で述べたように b_h は local consistency を持たないが、次の意味で $b \cdot \nabla u$ を近似していることを示す。

(12) $$| b_h(I_h v, \psi_h) - (b \cdot \nabla v, \psi_h)_h | \leq C(\gamma, p) \|b\|_{C^1(\bar{\Omega})} \|v\|_{W_2^p(\Omega)} \|\psi_h\|_{W_1^{p'}(\Omega_h)} h,$$

$$p > 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \qquad \forall v \in W_2^p(\Omega), \quad \psi_h \in \bar{V}_h.$$

そのためには

(13) $$\left| b_h(I_h v, \psi_h) - \int_\Omega b \cdot \nabla v \bar{\Psi}_h \, dx \right| \leq C(\gamma, p) \|b\|_{C(\bar{\Omega})} \|v\|_{W_2^p(\Omega)} |\psi_h|_{W_1^{p'}(\Omega_h)} h$$

を示せばよい。$\Gamma_h = \{$要素間境界の全体、但し、境界近くでは Γ までにしたもの$\}$ として、

$$b_h(I_h v, \psi_h) - \int_\Omega b \cdot \nabla v \bar{\Psi}_h \, dx$$

$$= \sum_{\Gamma_{ij} \in \Gamma_h} \int_{\Gamma_{ij}} b(s) \nu_{ij}(s) (\psi_h(P_j) - \psi_h(P_i)) \{ H(\gamma_{ij}) v(P_i) + (1 - H(\gamma_{ij})) v(P_j) \} ds$$

$$- \sum_{\Gamma_{ij} \in \Gamma_h} \int_{\Gamma_{ij}} b(s) \nu_{ij}(s) v(s) (\psi_h(P_j) - \psi_h(P_i)) ds$$

$$= \sum_{\Gamma_{ij} \in \Gamma_h} \int_{\Gamma_{ij}} b(s) \nu_{ij}(s) (\psi_h(P_j) - \psi_h(P_i)) \{ H(\gamma_{ij}) v(P_i) + (1 - H(\gamma_{ij})) v(P_j) - v(s) \} ds.$$

線積分を面積分で評価すると

$$\left| \int_{\Gamma_{ij}} \cdots \, ds \right| \leq C \|b\|_{C(\bar{\Omega})} \|v\|_{W_2^p(\Omega)} |\psi_h|_{W_1^{p'}(\Delta P_i P_j P_k)} h^{1 + \frac{2}{p}}$$

が得られるので(13)が成立する。

補題の(i),(ii)と(12)を用いれば命題が得られる(cf. Tabata [7; Theorem 3.1])。

定理の証明の方針. (5)式を書き直すと

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_h^{k+1}(P_i)-u_h^{k}(P_i)}{\tau} = -\displaystyle\sum_{j=1}^{N_P}\frac{d a_{ij}+b_{ij}}{m_{ii}}\, u_h^{k}(P_j) + f(P_i, k\tau) \\ u_h^{0}(P_i) = u^{0}(P_i) \qquad\qquad i=1,\dots,N_P,\ k=0,\dots,N_T-1, \end{cases}$$

となる。補題の(i),(ii)から(8)が,補題の(iii)から(9)が導かれる。(7)は命題(対応する楕円型問題の一様収束性)と(5)がL^∞安定(これは補題の(i),(ii)による)であることから証明できる(cf. Tabata [7; Theorem 1.1])。

参考文献

[1] Baba,K. & Tabata,M., A finite element method satisfying both discrete conservation law and discrete maximum principle, in preparation.

[2] Ciarlet,P.G. & Raviart,P.A., Maximum principle and uniform convergence for the finite element method, *Comp.Meth. Appl. Mech. Eng.*, 2(1973),17-31.

[3] Fujii,H., Some remarks on finite element analysis of time-dependent field problems, *Theory and practice in finite element structural analysis*, ed. by Yamada-Gallagher, 91-106, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1973.

[4] Gorenflo,R., Energy conserving discretizations of diffusion equations, submitted to *Proceedings of the Conference on Numerical Methods in Keszthely/Hungary*, 1977.

[5] Kikuchi,F., Discrete maximum principle and artificial viscosity in finite element approximations to convective diffusion equations, *ISAS Report*, 550(1977).

[6] Tabata,M., A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing, *Memoirs of Numer. Math.*, 4(1977),47-63.

[7] Tabata,M., Uniform convergence of the upwind finite element approximation for semilinear parabolic problems, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*