数理解析研究所講究録
329巻 1978年 2-9

角のある領域における重調和方程式の解の正則性
〜Kondrat'evの論文に即して〜

東大・理　　水谷　明

平面上の領域Ωをしめる一様な板の線型曲げは、境界が固定されているとき、適当な単位系において、

$$[P] \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

と記述される。ここで，fは外部荷重，$\frac{\partial}{\partial n}$は外向法線方向の微分を示す。

板の曲げ問題において、有限要素法などにより近似解析を行う場合、近似解の収束性、収束の速さを決定するためには、問題[P]の解uの滑らかさが重要な役割を果す。

領域Ωとして、境界が滑らかでない最も簡単な多角形領域の場合につき、解uがどの程度滑らかになるかを調べることがこの話の目的である。

この問題については、Kondrat'ev [1] の研究があり、

" Ωが凸多角形領域のとき、$f \in L^2(\Omega)$ならば、

[P] の弱解 $u \in H_0^2(\Omega)$、即ち、

$$(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad (\forall v \in H_0^2(\Omega))$$

を満足する解 $u \in H_0^2(\Omega)$ は $H^3(\Omega)$ に属す。"

ことを示した。

ここで、我々は、Ωの形状に更に制限を加えて、解uが$H^4(\Omega)$に属すことを保証する結果を述べる。証明はKondrat'ev [1] に従って行う。

<u>定理</u> Ωを各内角が$\pi/2$以下の多角形領域とする。このとき、$f \in L^2(\Omega)$ならば、問題[P]の弱解 $u \in H_0^2(\Omega)$ は $H^4(\Omega)$ に属す。 $\blacksquare$

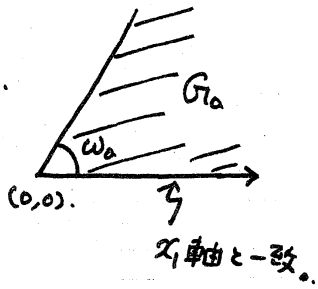
<u>注意</u> 上述の条件を満足するΩは、鋭角3角形と長方形に限られるが、良く知られているように、内角の大きさ如何にかかわらず、角の近傍を除けば、uの4回微分は二乗可積分である。従って、一般の多角形領域Ωの場合、$f \in L^2(\Omega)$に対し、Ωから、内角が$\pi/2$を越える角の近傍を

除いた部分において、解 u の4回微分が二乗可積分であることがわかる。

<u>定理の証明の方針。</u>

以下証明の方針を述べる。

G_0 を右図で示される平面上の領域とする。



重調和方程式の境界値問題

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{in } G_0 \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \Gamma_0 = \partial G_0 \end{cases}$$

を考える。(r, ω) を通常の極座標とし、更に $\tau = \log \frac{1}{r}$ と変数変換すると、(x_1, x_2)-平面上の領域 G_0 は、(τ, ω)-平面において、$D \equiv R^1 \times (0, \omega_0)$ に変換され、問題(1)は

$$(2)\quad \begin{cases} L u = e^{-4\tau} f & \text{in } D \\ u = \dfrac{\partial u}{\partial \omega} = 0 & \text{on } \partial D \end{cases}$$

と変換される。ここで、$L = L(\frac{\partial}{\partial \tau}, \frac{\partial}{\partial \omega})$ であり、具体的には、

$$Lu = u_{\tau\tau\tau\tau} + 4u_{\tau\tau\tau} + 2u_{\tau\tau\omega\omega} + 4u_{\tau\omega\omega} + 4u_{\tau\tau} + 4u_{\omega\omega} + u_{\omega\omega\omega\omega},$$

である。

重みつきの函数空間 $\mathring{W}^k_\alpha(G_0)$（$k$ は非負整数）を、

$$\|u\|^2_{\mathring{W}^k_\alpha(G_0)} = \sum_{m=0}^{k} \int_{G} r^{\alpha-2(k-m)} \times \sum_{|i|=m} |D^i u|^2\, dx.$$

（i は multi-index）.
で定義する。

[1°] $e^{-4\tau} f = F$ とおくと、
$\|f\|_{\mathring{W}^k_\alpha(G_0)}$ は、

$$\left\{ \sum_{i_1+i_2\le k} \int_D \left| \frac{\partial^{i_1+i_2} F}{\partial\tau^{i_1}\partial\omega^{i_2}} \right|^2 e^{-(\alpha-2k-6)\tau}\, d\omega\, d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}$$

と同等なノルムとなる。

問題 (2) を τ に関し、Fourier 変換を行うと、λ をパラメタとする、ω に関する常微分方程式の境界値問題 (3) に変換される。

$$(3)\quad \begin{cases} L(i\lambda, \frac{d}{d\omega})\hat{u} = \hat{F} & 0<\omega<\omega_0 \\ \hat{u} = \frac{d\hat{u}}{d\omega} = 0 & (\omega = 0,\ \omega_0) \end{cases}$$

但し、$\hat{F}(\lambda,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} F(\tau,\omega)\, d\tau$,

$\hat{u}(\lambda,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} u(\tau,\omega)\, d\tau$, であり、

(3) の上式は、具体的には、

(4) $$\widehat{u}^{(\mathrm{IV})} + (-2\lambda^2 + 4i\lambda + 4)\widehat{u}'' + (\lambda^4 - 4i\lambda^3 - 4\lambda^2)\widehat{u} = \widehat{F}$$

となる。

[2°] (Agranovich - Visik).

問題 (3) に対し、$\widehat{F}$ を $\widehat{u}$ に対応させる作用素 $R(\lambda)$,

$$R(\lambda) : L^2(\widehat{D}) \longrightarrow H^4(\widehat{D}) \cap H_0^2(\widehat{D}) \qquad (\widehat{D} = (0, \omega_0)).$$

が存在し、次を満たす。即ち、$R(\lambda)$ は、

1) λ に関し有理型で、

2) 任意の $p > 0$ に対し、$g > 0$ が存在して、

$R(\lambda)$ は、$\Lambda_{pg} \equiv \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, |\mathrm{Im}\,\lambda| < p$ かつ $|\mathrm{Re}\,\lambda| > g\}$

において極が存在しない。

3) 更に、次の評価が成立する。

$\exists\, C_1 = C(p, g)\,;$

$$(|\lambda|^4 \|R(\lambda)\widehat{F}\|_{L^2(\widehat{D})})^2 + \|R(\lambda)\widehat{F}\|^2_{H^4(\widehat{D})} \leq C_1 \|\widehat{F}\|^2_{L^2(\widehat{D})}$$

($\forall \widehat{F} \in L^2(\widehat{D})$, $\forall \lambda \in \Lambda_{pg}$ に対して)

[1°], [2°] により、問題 (1) に対する Kondrat'ev の定理 [3°], 及び正則性の定理 [4°] が成り立つ。

[3°] (Kondrat'ev)

$R(\lambda)$ が直線 $\mathrm{Im}\,\lambda = (-\alpha+6)/2$ 上に極がないとすると，

$\forall f \in \mathring{W}^0_\alpha(G_0)$ に対し，(1) の解 $u \in \mathring{W}^4_\alpha(G_0)$ が存在して，

評価

$$\|u\|_{\mathring{W}^4_\alpha(G_0)} \leq C \|f\|_{\mathring{W}^0_\alpha(G_0)}.$$

が成立する。

[4°] (Kondrat'ev)

問題 (1) において，u は $\mathring{W}^4_4(G_0)$ ，f は $\mathring{W}^0_0(G_0) \equiv L^2(G_0)$ に属すと仮定し，更に，$R(\lambda)$ が $1 \leq \mathrm{Im}\,\lambda \leq 3$ に極がないとすると，u は $\mathring{W}^4_0(G_0)$ に属す。

元の問題[P]に戻る。

任意の $f \in L^2(\Omega)$ に対し，$u \in H^2_0(\Omega)$ が一意的に存在して，

$$(\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}. \quad (\forall v \in H^2_0(\Omega))$$

を満たすが，容易な計算により，

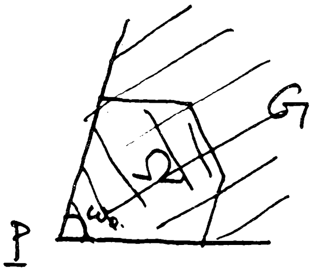
[5°] $u \in \mathring{W}^4_4(\Omega)$ が成立する。

但し，$\mathring{W}^k_\alpha(\Omega)$ は，P_j を Ω の頂点，$r(x) = \min_j (\mathrm{dist}(x, P_j))$ として

$$\|u\|^2_{\mathring{W}^k_\alpha(\Omega)} = \sum_{m=0}^{k} \int_\Omega r^{\alpha-2(k-m)} \sum_{|i|=m} |D^i u|^2 \, dx.$$

によってノルムを定義した重みつきの函数空間である。

PをΩの一つの頂点とし、
右図のようなconeをGとする。
Pに於ける内角をω_0とする。



[6°] 問題(1)′ $\Delta^2 v = f$ in G ; $v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$ on ∂G
に対応する([2°]における)$R(\lambda)$が $1 \le \mathrm{Im}\,\lambda \le 3$ に極がない、と仮定すると、(1)の解uは、OをPの(小)近傍として、$u \in H^4(O \cap \Omega)$ が成り立つ。

(∵) 通常の局所的議論、及び、[4°],[5°]より、[6°]が成立することがわかる。

角の近傍を除いた部分においては、uは、滑らかであるので、

[7°] ω_0が$\pi/2$以下のとき、問題(2)に対応する$R(\lambda)$が、$1 \le \mathrm{Im}\,\lambda \le 3$ に極がない。

ことを示せば、定理の証明は完了する。

[7°]の証.

問題(3)で右辺 $\hat{F} = 0$とおいた問題を考える。

$$
(5)\begin{cases} \hat{u}^{(IV)} + (-2\lambda^2+4i\lambda+4)\hat{u}'' + (\lambda^4-4i\lambda^3-4\lambda^2)\hat{u}=0 & (0<\omega<\omega_0) \\ \hat{u} = \dfrac{d\hat{u}}{d\omega} = 0 & (\omega=0,\ \omega_0) \end{cases}
$$

但し $'$ は $\frac{d}{d\omega}$ を示す。

$\beta^4 + (-2\lambda^2+4i\lambda+4)\beta^2 + (\lambda^4-4i\lambda^3-4\lambda^2)=0$ の根は、

$\beta = \pm\lambda,\ \pm i(i\lambda+2)$ より、(5)の一般解は、$\lambda \neq 0, 2i$, このとき

$$
\hat{u} = C_1 \cos i\lambda\omega + C_2 \sin i\lambda\omega + C_3 \sin(i\lambda+2)\omega + C_4 \cos(i\lambda+2)\omega.
$$

λ が $R(\lambda)$ の極であることと、(5)に自明でない解があることとは、同値であり、その条件は、

$$
(6)\quad \begin{vmatrix} 1 & \cos i\lambda\omega_0 & 0 & i\lambda \sin i\lambda\omega_0 \\ 0 & \sin i\lambda\omega_0 & i\lambda & i\lambda\cos i\lambda\omega_0 \\ 0 & \sin(i\lambda+2)\omega_0 & i\lambda+2 & (i\lambda+2)\cos(i\lambda+2)\omega_0 \\ 1 & \cos(i\lambda+2)\omega_0 & 0 & -(i\lambda+2)\sin(i\lambda+2)\omega_0 \end{vmatrix} = 0.
$$

$-z = i\lambda+1$ と変数変換して計算すると、(6)の左辺の行列式は、$4(z^2\sin^2\omega_0 - \sin^2 z\omega_0)$ となる。

計算によると、$z^2\sin^2\omega_0 - \sin^2 z\omega_0 = 0$ は、$\omega_0 \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、$0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 2$ の範囲で、$z=0, 1$ 以外の根はないことがわかる。従って(6)の根は、$1 \leq \mathrm{Im}\,\lambda \leq 3$ の範囲で、$\lambda = i, 2i$ のみをもつが、$\lambda = 0,\ 2i,\ i$ は他の計算により、$R(\lambda)$ の極でないことがわかっているので、[7°]が示された。Q.E.D.

文献 V. A. Kondrat'ev [1] Trans of the Moscow Math Soc. 16
227–313 (1967)