数理解析研究所講究録
334巻 1978年 79-90

$\dim(B(r)-B(s))$について

統計数理研究所　　長坂建二

§0. STEINHAUS の問題

H. STEINHAUS はその著書の中で，当時未解決となっていたいくつかの興味ある問題を提示した。その中の一つにある意味での自然数の独立性に関する問題がある。それは

r と s を二つの与えられた自然数とする時に，ある実数 $\omega \in [0,1] = I_0$ が r 進法で展開した時に正規数ならば s 進法に対して果して正規数かどうか？

というものである。議論を容易にする為に，いくつかの記号や定義を導入しよう。断わらない限り ω, ω_0, -- 等は単位区間 I_0 に含まれる実数とする。r と s は上記のように与えられた二つの自然数である。$\omega \in I_0$ は有理数を除いて，r 進法又は s 進法で一意的に展開することができる。

$$\omega = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k(\omega)}{r^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k(\omega)}{s^k} \qquad (0,1)$$

ωが有理数の場合には，例えばある項以降0を続ける方の展開を採用することにすれば，$(0,1)$の展開とωとが，丁度1：1に対応する。そこで我々はこの展開項に注目する。

以降の定義は，特に断わらない限りr，又は$R=\{0,1,\cdots,r-1\}$をs，又は$S=\{0,1,\cdots,s-1\}$に置き換えれば全く同様なので，r進法について定義を与えることにする。ωの展開項$x_1(\omega)$，$x_2(\omega)$，……はRの値を取り，ωが変れば$x_1(\omega)$，$x_2(\omega)$，等も様々な変化をする訳であるが

我々が注目するのは，展開項中のRの元の分布である。

そこで$j\in R$としωの展開項中にjの出現する回数を数え上る関数を

$$N_n(\omega;j)=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ x_i(\omega)=j}}1 \qquad (0,2)$$

と定義し，この関数を使って以下に定義を与えよう。

<u>定義</u>　$\omega\in I_0$がr進単純正規数である（$\omega\in A(r)$）とは，任意の$j\in R$に対して

$$\lim_{n\to\infty}N_n(\omega;j)/n=1/r \qquad (0,3)$$

が成立することである。

例えば $1/3 = .010101\cdots$（2進法）は2進単純正規数だが，明らかに，3進単純正規ではないし，10進単純正規数でもない。　この単純正規数の概念では十分に展開項の分布の様子を表わしているとは言えない為に，(0,2) の数え上げる関数を以下のように拡張する。

$\Delta = (j_1, j_2, \cdots, j_p) \in \mathcal{R}^p$ の元として，

$$N_n(\omega\,;\Delta) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i(\omega) = j_1 \\ x_{i+1}(\omega) = j_2 \\ \vdots \\ x_{i+p-1}(\omega) = j_p}} 1 \qquad (0,4)$$

と定めると，

<u>定義</u>　$\omega \in I_0$ が r 進正規数である（$\omega \in B(r)$）とは任意の $p \geq 1$，任意の $\Delta \in \mathcal{R}^p$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} N_n(\omega\,;\Delta)/n = 1/r^p \qquad (0,5)$$

が成立することである。

ここで殆んど全ての（ルベーグ測度の意味で）$\omega \in I_0$ は r 進正規数だから，$B(r) \cap B(s)$ のルベーグ測度も勿論1になる。（r と s が何であれ。）

<u>定義</u> 全ての進法に関して正規数を絶対正規数と呼び，その全体をBと書くことにする． i.e. $B=\bigcap_{r=2}^{\infty} B(r)$.

前頁に注意したことと，ルベーグ測度の基本的な性質から，殆んど全ての$\omega \in I_0$は，絶対正規数である。しかしながら個々のxについては，事情は別であり，次節でこの問題に対する解決を述べ，第2節では標題に掲げた $\dim(B(r)-B(s))$ を計算する。第3節はそれ以外の補遺に当るものになるであろう。

§1. INDEPENDENT RESOLUTION BY CASSELS AND BY SCHMIDT.

前節で提示された，一つのSTEINHAUSの問題は，J.W.S. CASSELS と W.M. SCHMIDT により独立に解答が与えられた。今回のシンポジウムのMAIN GUEST であるSCHMIDT 教授は，WIEN大学で教育を受け，HLAWKA 教授の古い弟子である。この問題に彼が取組んだのも，HLAWKA教授の影響かとも想像されるが，当時既にMONTANA大学教授の職にあるので，真相はわからない。しかし講演後本人からも，"COINCIDENCE

BY CHANCE" とあったように，全く独立になされ，出版された年こそ一年違いが，完全な解答を与えた点では SCHMIDT の論文は価値が高いものである。ともあれ二人の解決に入る前に正規数の定義から直ちにわかることを述べよう。

正規数である為の同値な定義はいくつか知られていて，E. BOREL によるものは，前節に挙げたものと，今一つ，

$$\omega \in B(r) \iff \omega,\ r\omega,\ r^2\omega,\ \cdots \qquad (1,1)$$

$$\text{が全て} \in A(r),\ A(r^2),\ \cdots$$

この同値性は NIVEN & ZUCKERMAN により証明され，更に PILLAI により

$$\iff \omega \in A(r),\ A(r^2),\ \cdots \qquad (1,2)$$

とより強い結果になった。

このPILLAIの結果から k を2以上の任意の自然数として

$$\omega \in B(r) \implies \omega \in B(r^k) \qquad (1,3)$$

$$\text{i.e. } B(r) \subset B(r^k)$$

一方 $\omega \in B(r)$ である必要条件の一つとして，$r\omega,\ r^2\omega,\ \cdots$ の小数部分が mod 1 で一様分布することが知られている。そこで，$\omega \in B(r^k)$ を一つ取ると，$r^k\omega,\ r^{2k}\omega,\ r^{3k}\omega,\ \cdots$ は mod 1 で一様分布する。だから $\{r^{nk+j}\omega\}_{n=1,2,\cdots}$ は，$j=1,\cdots,k-1$ に対して mod 1 で一様分布する。だから $\{r^n\omega\}_{n=1,2,\cdots}$ は k 個の一様分布する部分列を並べたものだから，矢張り一

様分布する。 つまり $\omega \in B(r)$. 以上より, k を 2 以上の自然数として

$$B(r) = B(r^k) \qquad (1,4)$$

(1,4) からこの STEINHAUS の問題に対する予想を立てることができる。 つまり勝手に与えられた二つの自然数 r と s に対し $B(r)=B(s)$ となるのは, 適当な二つの自然数 m, n が存在して $r^m = s^n$ となる, 言い換えると

$$\log r^m / \log s^n \in \mathbb{Q}$$

このような m, n が存在する時に $r \sim s$ と書くことにする。 (1,4) から $r \sim s \Rightarrow B(r)=B(s)$ である。

r と s との間に上のような自然数 m, n が存在しない時に $r \nsim s$ と書くことにする。 SCHMIDT の定理は次のようである。

<u>定理</u> (W. M. SCHMIDT)

A. $r \sim s$ ならば, $B(r)=B(s)$ である。

B. $r \nsim s$ ならば, r 進正規だが s 進正規でない (s 進単純正規ですらない) 数全体の集合は, 連続濃度を持つ。

A. の部分に対しては, 今簡単に証明を与えたが, B の方の証明はきちんとすれば長くなるので, CASSELS が示した $r=3$ $s=2$ の IDEA のみを以下に記すことにする。

明らかに，$2 \nmid 3$である。2進法で展開された数ωをそのまま3進法で見ると（CANTOR SET の元である。），3進正規ではない。（3進単純正規でもない。）ところが殆んど全てのωに対して$2\omega, 2^2\omega, 2^3\omega, \cdots$は一様分布するから，2進正規数の定義に戻れば，定理のBは証明を終る。

そこで次に考えたいのは，r進正規でs進正規でない集合の薄さである。少くとも連続濃度あるが，ルベーグ測度では零集合となっているこの集合$(B(r)-B(s))$ $(r \nmid s)$の薄さを計るのに，ハウスドルフ次元を用いた。ハウスドルフ次元の定義や基本的な性質，及び計算法とその応用については，例えば京都大学数理解析研究所講究 No. 294 "整数論" に詳しく書いたので，ここでは述べないが，その中の BEYER の結果を用いて次節で $\dim(B(r)-B(s))=1$ if $r \nmid s$ を示す。

§2. $\dim(B(r)-B(s))=1$ if $r \nmid s$.

この集合$B(r)-B(s)$ $(r \nmid s)$のハウスドルフ次元を計算するのに，$B(r)-B(s) \neq \phi$ という SCHMIDT の結果から，元$\exists \omega_0 \in B(r)-B(s)$を取ることができる。我々は定理の証

明に入る前に次の LEMMA を示そう。

<u>LEMMA</u>　$\omega \in B(\tau)$ とすると殆んど全ての $y \in I_0$ に対して，(ω, y) は2次元ベクトルとして τ 進正規である。

ここで (ω, y) が2次元正規として τ 進正規であるとは，

$$(\tau\omega, \tau y),\ (\tau^2\omega, \tau^2 y),\ \cdots,\ (\tau^n\omega, \tau^n y),\ \cdots$$

の小数部分が I_0^2 上で一様分布することと定義しておく。

$$S_{k,l}(N, y) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i(k\tau^n\omega + l\tau^n y)} \qquad (2,1)$$

と定義すると，上の lemma を証明する為には，$(0,0)$ 以外の任意の整数の組 (k, l) に対して

$$S_{k,l}(N, y) \to 0 \quad (N \to \infty) \qquad (2,2)$$

を示せばよい。

$l=0$ の場合 $(2,1)$ は y に無関係となるから，$\omega \in B(\tau)$ より $(2,2)$ が成立することは明らかである。

$l \neq 0$ としよう。この時 $(2,2)$ を殆んど全ての y に対して直接証明するかわりに，

$$I_{k,l}(N) = \int_0^1 |S_{k,l}(N, y)|^2 dy \qquad (2,3)$$

と定義し，

$$\sum_{N=1}^{\infty} I_{k,l}(N)/N < \infty \qquad (2,4)$$

を示せば良い。 実際

$$I_{k,l}(N) = \int_0^1 |S_{k,l}(N, y)|^2 dy$$

$$= \frac{1}{N^2}\int_0^1 \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} e^{2\pi i[k(\tau^n - \tau^m)\omega + l(\tau^n - \tau^m)y]} dy$$

ここで $\displaystyle\int_0^1 e^{2\pi i p x} dx = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \quad p \text{整数} \end{cases}$

であることに注意すれば,

$$= \frac{1}{N^2}\int_0^1 \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i[k(\tau^n - \tau^n)\omega + l(\tau^n - \tau^n)y]} dy$$

$$= \frac{1}{N} .$$

$$\sum I_{k,l}(N)/N = \sum 1/N^2 < \infty .$$

これで LEMMA の証明は終ったが、この LEMMA は y を任意のベクトル $\in I_0^p$ に変えても同様の結論が言えることは殆んど明らかであろう。 この LEMMA と BEYER の定理により次の定理を得る。

<u>定理</u> $\tau \neq s$ ならば, $\dim(B(\tau) - B(s)) = 1$ である。

<u>証明</u> BEYER の定理は I_0 から I_0^k への変換 T_k をまず定義し、任意の集合 $M \subset I_0$ に対して

$$\dim M = \frac{1}{k} \dim T_k M \tag{2, 5}$$

が成立する。 ここで変換 T_k は $\omega \mapsto T_k\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$
として $\omega_j = \sum_{i=1}^{\infty} x_{(i-1)k+j}(\omega) \quad \left(\omega = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\omega) \right)$
で定義されるものである。 与えられた $\omega_0 \in B(r) - B(s)$
に対して，$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{k-1}, \omega_0)$ が k 次元 r 進正規となる
ような $(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{k-1}) \in I_0^{k-1}$ の集合を P_{k-1} と書くと，
LEMMA によりルベーグ測度一ぱいになる。 次に集合 $G_k \subset I_0^k$
を

$$G_k = P_{k-1} \cap [T_{k-1}(B(r) \cap B(s))] \times \{\omega_0\}$$

と定義すれば (2, 5) より

$$\dim T_k^{-1} G_k = (k-1)/k \tag{2, 6}$$

である。 G_k の定義から，$T_k^{-1} G_k \subset B(r)$ は殆んど明らかで
あろう。

$B(r)$ に関する Pillai の結果を応用して

$$T_k^{-1} G_k \subset B(r) - B(s) \tag{2, 7}$$

を示すことも，比較的容易であろう。

(2, 6)，(2, 7) は任意の $k \geq 2$ に対して正しいから

$$\begin{aligned} 1 \geq \dim(B(r) - B(s)) &\geq \sup_k \dim T_k^{-1} G_k \\ &= \sup_k (k-1)/k \\ &= 1 . \end{aligned}$$

〈証明終〉

§3. 補遺.

前回の京都大学数理解析研究所での講究録234で述べた未解決の問題の1つ，$\dim(B - B(A)) = 1$ は，前節の定理の系として直ちに導びかれる。

次に同p135での $\dim X \geqq 2$ となるような f としては，例えば連続だが至る所微分不可能となるブラウン運動のPATHのようなものを取れば良い。

前節のLEMMAの証明はPROCEEDINGS OF THE JAPAN ACADEMYに掲載された論文中の証明とは違うものである。

STEINHAUSの問題をより一般的な立場から問題として論文が何編かあり，それらについてもハウスドルフ次元を考える余地が残されているだろうが，別の機会に触れることにして筆を置くことにする。

24／8／78

強い残暑の中で。

REFERENCES

[I] Beyer,W.A.; Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series, Pacific J. Math.,I2,35-46 (I962).

[2] Cassels,J.W.S.; On a problem of Steinhaus about normal numbers, Colloq. Math.,7,95-I0I (I959).

[3] Kuipers,L. and Niederreiter,H.; Uniform distribution of sequences, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York-London-Sydney-Toronto (I974).

[4] Nagasaka,K.; Theory of Hausdorff dimension and its applications, Research on theory of numbers (Proc. Sympos., Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.,No.294,I24-I44),in japanese (I977).

[5] Nagasaka,K.; On Hausdorff dimension of sets missing statistical laws, Proc. of the Inst. of Stat. Math.,25-I,I-9, in japanese,(I978).

[6] Nagasaka,K.; La dimension de Hausdorff de certains ensembles dans [0,I], Proc. of the Japan Academy,54 Ser. A-4, I09-II2 (I978).

[7] Schmidt,W.M.; On normal numbers, Pacific J. Math.,I0,66I-672 (I960).