

О НЕКОТОРЫХ СУММАХ ВОВЛЕКАЮЩИХ В НИХ ДРОБИ ФАРЕЯ

Сигэру Канэмицу (Фукуока)

Настоящая заметка - конспект работы автора [2] .

которая теперь в продаже и о содержании которой уже было доложено при okazji собрания для исследования в Киото.

Мы будем применять следующие обозначения везде в

этой заметке: F_n - ряд Фарея порядка n . т.е., множество несократимых дробей, лежащих между 0 и 1, оба включенные,

с знаменателями, не превосходящими n ; Q_n - множество

пары знаменателей соседних дробей из F_n : $Q_n = \left\{ (k, k') \mid \frac{h}{k} < \frac{h'}{k'} \right\}$.

P_1 - функция Бернулли первой степени, т.е., функция с

периодом 1, которая в интервале $[0, 1)$ совпадает с первым

полиномом Бернулли: $P_1(x) = \{x\} - 1/2$. Иные символы

будут иметь обычные значения в аналитической теории чисел.

Мы будем исследовать суммы вида

$$S_n = \sum_{(k, k') \in Q_n} k^l k'^m ,$$

где l и m - целые числа, которые уже были трактованы в

специальных случаях Лернером-Ньюманом [3] и Холлом [1] .

Наши результаты - улучшения тех, которые получены этими математиками. Имея в виду выше указанные обозначения, сформулируем результаты.

Теорема 1. При целых положительных a, b мы имеем

$$\sum_{(k, k') \in Q_n} k^a k'^b = c_{a,b} n^{a+b+2} + o(n^{a+b+1} (\log \log n)^{1+\varepsilon})$$

для каждого $\varepsilon > 0$ с постоянной

$$c_{a,b} = \frac{6}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{(1+a)(1+b)} - \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(2+a+b)} \right\}.$$

Теорема 2. Для каждого $\varepsilon > 0$ и целого положительного

m имеют место асимптотические формулы :

$$\sum_{(k, k') \in Q_n} (kk')^{-m} =$$

$$= \begin{cases} \frac{12}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \left\{ \log n + \gamma + 1/2 - \sum'_{\substack{d|n \\ d < n}} (2) \right\} + o\left(\frac{1}{n^3} \log^{5/3} n (\log \log n)^{1+\varepsilon}\right), & \text{если } m=2, \\ 2 \frac{\zeta(m-1)}{\zeta(m)} \frac{1}{n^m} \theta + \frac{1}{\zeta(2)} \frac{1}{n^4} \log n + o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right), & \text{если } m \geq 3, \end{cases}$$

где γ - постоянная Эйлера и θ определяется формулой

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{если } m=3, \\ 0, & \text{если } m \geq 4. \end{cases}$$

Теорема 3. Мы имеем в случае $m \geq 2$

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^m} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,r)=1}}^r \sum_{l=1}^{m-1} \binom{m}{l} \frac{1}{k^{m-l} (r-k)^l} = 1.$$

Доказательства предшествующих двух теорем основываются

с одной стороны на следующих леммах:

Лемма 1 (Лернер-Нюман). Для любой функции f :

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ имеет место формула

$$\sum_{(k,k') \in Q_n} f(k,k') = f(1,1) + \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ (k,r)=1}}^r \left\{ f(k,r) + f(r,k) - f(k,r-k) \right\}.$$

Лемма 2 (Вальфиш-Салтыков). Справедлива оценка

для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d} P_1\left(\frac{x}{d}\right) = O\left(\log^{2/3} x (\log \log x)^{1+\varepsilon}\right)$$

А с другой стороны они опираются также на асимптотические результаты Холла и некоторые теоретико-числовые рассуждения

(по подробности см. [2]). Теорема 3 - их следствие.

Замечание. Мы приняли несколько слабее версии результатов ради простоты.

В заключение автор выражает благодарность проф. Фудзиваре за давание ему оказию разговора на собрании.

Цитированная Литература

- [1] R. R. Hall, A note on Farey series, J. London Math. Soc., (2), 2 (1970), 139-148.
- [2] S. Kanemitsu, On some sums involving Farey fractions, to appear in Math. J. Okayama Univ.
- [3] J. Lehner and M. Newman, Sums involving Farey fractions, Acta Arith. 15 (1969), 181-187.

Department of Mathematics

Kyushu University

Fukuoka, Japan