数理解析研究所講究録
335巻 1978年 176-183

魚の運動と vortex sheet

東大 理学部　神部 勉

1. はじめに

魚の泳法は大別して，うなぎ型 Anguilliform とあじ型 Carangiform の2つの主な泳法およびその他に分類される．うなぎ型の泳法では体全体が柔軟で，推進波は魚の体に沿って頭から尾まで伝わっていき，振幅は後方に向ってやゝ増加する．これと対照的にあじ型の泳法では，うねり運動は体の後半か$\frac{1}{3}$に限られ，前半には体の柔軟性が見られない．あじ型泳法は，活動的でしかも高速で効率的に泳ぐ水棲動物に見られる．尾を振って推進するとき，体の他の部分は受動的な反動運動をする．Lighthill（1970）によると，あじ型の泳者には2つの形態上の特徴があって，反動運動が小さくおさえられている．第1に，本体が長くてかなりの上下幅をもつことである．尾の振動運動で必然的に発生する横力によって前部が横に振られるとき，体の形に関係した水の大きな

virtual mass が体の質量に加わるので，慣性が大きくなるばかりでなく，この横揺れ運動は大きな慣性モーメントの存在によって小さくなる．第2に，振動する尾と受動的に反応する本体の間に非常に細い部分（尾柄）が存在することも反動運動を小さくするのに役立っている．

Lighthill (1960) は細長い物体の理論にもとづいて，尾びれ以外にひれを持たない魚について，泳運動で得られる推力および魚の仕事率を評価した．尾びれによって後流につくられる渦面（vortex sheet）は後ろ向きの運動量をもつが，推力はこの反作用と関係づけられる．魚は種々のひれをもつが，中には上下幅が最大となる位置より後方に帯状のひれをもつのがいる．このようなひれがあると，ここからも振動する渦面 vortex sheet が作られる．Wu (1971) は Lighthill 理論を拡張して，この種の帯状のひれをもつ魚の泳運動に対し，渦面ができることの影響を評価した．前縁については十分にまるくて流れの剥離はないと仮定し，とがった後縁では Kutta の条件がなりたつとする．後縁からは非定常運動のとき，渦面が作られる．

剛体の本体にかなり柔軟につけられた尾びれが，大きな振幅の横振動をするとき，推力と横力を発生する．これらは逆に，体の筋肉が尾に作用する振動力によってつくられる．作用反作用の法則により，体の前部は符号が反対の振動力に振ら

れることになる．これによって起る反動運動が大きいと，エネルギー損失も大きくなる．尾びれによる推力発生の理論と相補的な理論として，Lighthill (1977) はこの揺動運動に対し，新しく‘反作用力・抵抗力’理論を出している．反動運動をする本体は剛体とし，尾の作る振動横力を表わす振動力が，剛体の後端に作用したときの，横揺れ運動とエネルギー損失を近似的に評価している．

Lighthill (1977) の考えにもとづく反作用力・抵抗力理論を拡張して，側面から渦面が放出されるばあいも含むように一般化することができる．このようにして得られる方程式は，魚の方向回転運動を記述するように更に一般化することもできる（Kambe (1978)）.

2. 細長い魚の理論

Lighthill および Wu の細長い物体の理論によると次のような結果が得られる．x 方向に一様な流れ U の中で，魚の頭から距離 x の断面が流れに直角に $h(x, t)$ で与えられる変位をするとき，体の横速度は $\partial h/\partial t$ $(\equiv W)$ となるが，速度 U で流れている水を押す横押し速度は （t：時間）

$$w = \frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x}$$

で与えられる．魚の体軸に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として，速度 $w\boldsymbol{n}$ で横に押すと，x 方向の単位長さ当り，水は $m_a w \boldsymbol{n}$ の横運動量を得る．ここで $m_a(x)$ は単位長さ当りの水の付加質量（virtual mass または added mass）．この水のもつ横運動量の変化率が，魚が水に作用する力 G に等しいはずである：

$$G = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right) m_a w - \epsilon U w \frac{dm_a}{dx} .$$

魚が水から受ける反作用力は $-G$ である．ここで側端が十分まるくて渦面が出ないときは $\epsilon = 0$，側端がとがっていて渦面が作られるときは $\epsilon = 1$．魚の受ける力 $-G$ は水の慣性から生ずるもので，この意味でも反作用力という名は適当と思われる．この力の他に，魚は抵抗も受ける．法線運動 $w\boldsymbol{n}$ があるとき，この抵抗の法線成分 D_n を次のように近似的に表わせよう：

$$D_n = -\frac{1}{2}\rho C_n s |w| w .$$

ρ は水の密度で，抵抗係数 C_n が約2のときは平板に対応し，値の上限と考えてよいだろう．s は体の上下幅．この他にもちろん接線運動に対応して，接線抵抗 D_t を受けよう．従って全抵抗力 $\boldsymbol{D}$ は $D_n \boldsymbol{n} + D_t \boldsymbol{t}$ で表わされる（$\boldsymbol{t}$ は体

軸の接線単位ベクトル）．

ここではモデル魚を考えることにして，本体は剛体と仮定し，その上下幅は $s(\xi)$ $[-a \le \xi \le a]$ で表わされるとする．ここで座標 ξ は魚に固定されていて，頭から後端までの魚の軸に沿った座標で，原点は中点にとり，魚の長さは $2a$ とする．このモデル魚では尾がない代りに，後端に外力 $\boldsymbol{F}(t)$ が作用するものとし，これは尾の振動によって得られる力を表わす．

以上の前提のもとに，魚の運動方程式をつくることができる．体の断面 ξ の重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{X}(\xi, t)$ で表わすと，加速度は $\boldsymbol{X}_{tt}$ ．単位長さ当りの体の質量を $m_b(\xi)$ とすると，魚の運動方程式は

$$\int_{-a}^{a} m_b \boldsymbol{X}_{tt}\, d\xi = \boldsymbol{n}\int_{-a}^{a} G\, d\xi + \int_{-a}^{a} \boldsymbol{D}\, d\xi + \boldsymbol{F} \tag{1}$$

となる．また角運動量方程式は

$$\int_{-a}^{a} m_b (\boldsymbol{X}_{tt}\cdot\boldsymbol{n})\xi\, d\xi = \int_{-a}^{a} G\xi\, d\xi + \int_{-a}^{a} (\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n})\xi\, d\xi + (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})a \tag{2}$$

3．反動運動

尾の運動によって起こされる本体の反動運動をみるために，$\boldsymbol{F}$ が法線成分のみをもち，

$$F_0 e^{i\omega t} \tag{3}$$

の実部で表わされる振動力のばあいを考える．Fはx，y成分のみをもち，魚の運動はx，y面内で行なわれるとしてよいだろう．魚の重心X_0の運動は，負x方向に平均的にU_0の速度をもち，

$$\overline{\dot{X}_0} = (-U_0, 0) \tag{4}$$

と表わされるとする（バーは時間平均）．このとき体の断面は横揺れ運動をし，微小攪乱のばあい，横揺れ速度は

$$V_n = v_0 \left(1 + \frac{\xi}{b}\right) e^{i\omega t} \tag{5}$$

という形に表わされる．いま簡単のために

$$s(\xi) = s_m \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right) \tag{6}$$

と仮定する．(3)〜(6)を(1)，(2)に代入すると，

$$\lambda v_* = f_1(\lambda\varsigma, \nu, \gamma)$$

$$\beta = f_2(\lambda\varsigma, \nu, \gamma)$$

という形式の代数方程式が得られる（Kambe(1978)）．ここで

$$\lambda = \frac{4}{3\pi} C_n \quad , \qquad \beta = \frac{b}{a}$$

$$v_* = \frac{v_0}{s_m \omega} \quad , \qquad \varsigma = \frac{F_0}{M_0 s_m \omega^2}$$

$$\nu = \frac{2a\omega}{U_0} \quad , \qquad \gamma = \frac{\sigma}{1+\sigma} \quad ,$$

M_0 は魚の全質量 M_b と全付加質量 M_a の和であり，魚の断面は楕円と仮定し，長軸に対する短軸の比を σ とした．この反動運動に伴うエネルギー損失は

$$\overline{P} = \overline{F(t)\ W(t,a)}$$

で与えられる．

法線抵抗がなく（$\lambda = 0$），$\nu = \infty$ のときは

$$\beta = \frac{1}{\gamma} \ , \qquad v_* = -i\varsigma \ , \qquad \overline{P} = 0 \ ,$$

が得られ，損失はない．

$\lambda \neq 0$ で，$\nu =$ 有限のときは，$\varsigma \ll 1$

$$\frac{\overline{P}}{\frac{1}{2}\omega s_m F_0} = \begin{cases} O(\varsigma^2) & (\epsilon = 0 \text{ のとき}) \\ O(\varsigma) & (\epsilon = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が得られる．従って微小振幅の反動運動のときは，帯状のひれがあると（$\epsilon = 1$），エネルギーの損失が増加することがわかる．

また横揺れの振幅が最小となる位置は，このモデルでは，

体長を1とするとき，頭から 0.42 のところにある．観測によると，0.36 (dace，ハヤ)，0.31 (bream)，0.29 (goldfish)，0.31 (カツオ) と得られている．

4．方向回転

定速度運動をしている魚に作用する力 $F_n = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ が振動力でなく，δ関数的な法線瞬間力のとき，魚の体が進行方向に対し傾き，その結果，進行方向が変る．このような回転運動，およびこの運動へのひれの効果は，やはり方程式 (1)，(2) を使って調べることができるが，詳細は Kambe (1978) を参照されたい．

参考文献

Lighthill, M. J. (1960), J. Fluid Mech. 9, 305.
Lighthill, M. J. (1970), J. Fluid Mech. 44, 265.
Wu, T. Y., (1971), J. Fluid Mech. 46, 545.
Kambe, T., (1978), J. Fluid Mech. (to appear).