

収束性の良い級数解の求め方

宇都宮大 教養部 徳田尚之

§1. はじめに

工学、物理学等の多くの重要な問題の解法として級数解は非常にひんぱんに用いられる解法の一つである。ことに、求ま、その級数の収束半径内では、この級数解は問題の厳密解を与えらることもあり、古くから好んで使われて来た大変な強力な方法である。しかし、一般的には発散してしまつた厳密解は与えられないか最初の数項だけをとると求める関数の可成り正確な近似を与える漸近展開係数と比較すると、この「厳密な」級数解は一般的には非常に収束速度が遅く、相当多数の項数を計算しないと良い近似の得られることが非常に多い。ことに高次の項の計算に要する労力はたゞそのうすうすに膨大になる場合が多く、ゆゑに計算機を使うと、こゝに余りに多くの項数の計算は実用的ではない。したが、こゝに出来るだけ少々の項数で良い近似が得られることが望ま

しい訳である。このため級数解の収束速度を改善する方法が
 多くから研究されていゝる。たとえば、Shank's変換、連分教展
 南、Pade展用などはその最も代表的な成功例であらう。この
 級数の収束速度の改善方法についての最近までの展望は Van
 Dyke (1974) に詳しい。また電子計算機での数値計算法と
 も関連して最近での Pade 展用理論の発展を日覚ましく、こ
 れについては Baker (1974) の著書に詳しい。

さて、この論文では、これまでの方とは違つて全く新し
 い級数展用のスキームを紹介することにしたい。まずある
 解析関数 $f(z)$ を級数展用で近似あることを考へておかう。こ
 れでは複素数である。もし $f(z)$ が原点の近傍で正則であら
 ば、

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad |z| < R_0 \quad (1.1)$$

ここで R_0 はある正の数で収束半径である。つまり a_n も 0 の場合
 を考へることにしてしよう。もし $a_1 = 0$ のとき々は、(2.14) 式
 の所を参照して述べたい。つまり $f(z)$ のある偏角領域 ($\arg z$)
 での $|z| \rightarrow \infty$ の振舞ひが次の如く判つていゝるとしよう。

$$f(z) \sim C_\infty + o(1) \quad |z| \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

ここで C_∞ は定数で、 $o(1)$ は 1 に較べて小さいことを表わすオ
 ーダ記号である。 C_∞ は z の虚数でもよゝか、ここでは
 簡単のため定数として扱ふ。

これまでの級数解と違ひ、本級数解の骨子 2 関数の展南近似を行ふ前に近似すべき (従属) 関数 f と (独立) 変数 z を、ともに一般的には非線形 n 次の様相変換で新しい "関数" $j(f)$ と "独立変数" τ に変換することがある。

1. 関数 $j(f)$ の導入.

式 (1.1), (1.2) で定義された a_0, c_0 を使ひ、 f へ τ の一次関数で次の様相関数 $j(f)$ を定義する。

$$j(f(z)) = \frac{(f(z) - c_0)z}{f(z) - a_0} \quad (1.3)$$

2. 独立変数 τ の導入.

$$\tau(z) = \frac{zf'}{f - a_0} - 1 \quad (1.4)$$

' は z についての微分を表す。本誌では、(1.1) の f の z での展南 τ より収束性の良い $j(f)$ の τ での展南に変換し、最終的には (1.4) から関数 f を近似してゆく。(1.3) の $j(f)$ は (2.15) で示す様相一般的には f へ τ の N 次の有理関数となり、従って非線形変換となるし、(1.4) 式とその中に近似せんとする f 自体が含まれてゐることから明らかなる様相非線形変換である。また (1.1) より一般的の場合には (2.14) 以下で吟味してあり、ここでは f が (1.1) で表わせる場合のみ吟味しよう。(1.3), (1.4) の変換式は、一見して判る様相 f と τ についての見事な対称性をもつてゐること注目値しよう。

本論文では、 $j(f)$ を τ での展南 τ 慣用的に "関数" とする用法ではあるが、 $j(f)$ は "関数 f へ対応する関数" という意味で使はれる。

級数がある条件下では収束することを証明する。こぎに、実際いくつかの例題について、この方法を使うと、級数の収束性が著しく改善されることを示す。

この(1.4)式の変数では、実は非定常境界層の解析で Moore (1951) が導入した無限個の“小エッジ”パラメータ - の内の一番最初に現われるパラメータ - と類似していることを指摘しておこう。Moore が考えたのは半無限平板から時間的にある定、長速度 $U(t)$ で運動する際の境界層の問題であった。実際に非定常境界層方程式を解いていくと、次の様な無限個のパラメータ -

$$\tau_1 = \frac{\dot{U}}{U}, \quad \tau_2 = \frac{\ddot{U}}{U} \left(\frac{x}{U}\right), \quad \tau_3 = \frac{\dddot{U}}{U} \left(\frac{x}{U}\right)^2, \dots \quad (1.5)$$

が現われ、それぞれ別のパラメータ - が小さければ境界層は準定常的挙動を示し、解は定常な Blasius 解からの摂動解として求まることを示した。ここで \cdot は時間微分を示し、 x は平板前縁部からの距離である。たとえ、もし $U \propto At^n$ $n > 0$ の様に変化すれば、 $\tau_1 = O(x/t^{n+1})$, $\tau_2 = O(x^2/t^{n+2})$, ... となり、 $x = O(1)$ でさえあれば、それぞれのパラメータ - は $t \rightarrow \infty$ では小さくなることを加判する。しかし、この様にして求めた無限個の多変数展開が収束しているかどうかは全く別な議論証明はされないのである。また任意に(1.5)式のパラメータ - 群 $\{\tau_n\}$ は、全部同じオーダーの大きさである

場合を多く、一般の場合の収束性の証明は不可能と思われる。ここで注意したいのは、(1.4)の σ と(1.5)の最初の11項 σ が非常によく似ていることである。じつは、著者はこのMooreの方法と相変化問題(Tokuda 1966, 1968, 1970)で使った $\{\sigma_n\}$ シリーズを適当箇所を訂正して、また変収束性の良い解が求まることに注目した。今回の新しい級数解はこのMooreの方法に端を発したもので、Mooreの方法では証明出来たが、級数の収束性の証明が与えられなかったのでここに報告する。

§2でその収束の証明を与え、§3では実際の例題とこの方法で解いたその収束性の良いことを示してみよう。

§2. 新しい級数展開法とその収束性

§1で導入した解析関数 $f(z)$, 洞関数 $j(f(z))$, 変数 $\tau(z)$ と考えてみよう。 $f(z)$ は(1.1)式の如くある範囲で無限級数に展開可能とする。一方(1.3)式で定義された洞関数 $j(f)$ も、 $(f - a_0)$ の零点の中で $\tau = 0$ のものを除いて次に述べた零点までは解析的であるので、その範囲内では無限級数に展開出来る。

$$j(f(z)) = \frac{(f(z) - c_\infty)z}{f(z) - a_0} = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_nz^n + \dots \quad (2.1)$$

この $j(f)$ と全く同じことは (1.4) 式で定義した τ について
 云える。ただしこの場合は定数の項がなく、

$$\tau(z) = b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n + \dots, \quad (2.2)$$

と書ける。この (2.2) 式の様に $b_0 = 0$ の級数を特に **概単級数級数**
 (almost unit series) と呼び、二つの関数による合成関
 数または合成変換を考える際には不可欠な条件の一つである
 。(詳しくは、Henrici (1974) を参照)。この (2.2) 式は
 常に逆変換出来る (Henrici 1974)。

$$z = \hat{\tau}(z) = d_1z + d_2z^2 + \dots + d_nz^n + \dots \quad (2.3)$$

逆変換 $\hat{\tau}(z)$ もまた常に概単級数級数である。このことから
 , Lagrange - Bürmann の定理を用いて次の定理を証明する

定理1. 複素平面上で、原点を囲み、しかも式 (1.1),
 (1.3), (1.4) でそれぞれ定義される関数 f , $j(f)$, τ のい
 ずれもその内部及びその上で解析的である様なある閉曲
 線 C を考えよう。さらに閉曲線上の任意の点 z と、 C に
 囲まれた領域中の任意の点 x と、それぞれ、上の関数
 τ は次の不等式

$$|\tau(x)| < |\tau(z)| \quad (2.4)$$

と常に満足しているとする。すると汎関数 $j(f)$ は次の様式で表わすことの無限級数に展開可能である。

$$j(f(z)) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots + B_n z^n + \dots \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち, } B_0 &= \frac{a_0 - c_0}{a_1} = j(f(c_0)) \\ B_n &= \frac{1}{n} \operatorname{Res} \left[\frac{j'(f(z))}{z^n} \right] \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

ここで $'$ は z についての微分であり, $\operatorname{Res} [\]$ は $[\]$ 内の項の留数を表わし; 定義により $[\]$ 内の項を Laurent 展開したときの z^{-1} の項の係数である。

証明. この証明は一般には Lagrange-Bürmann の定理として知られているもので, 上の定理のようには $f, j(f), z$ が共に解析関数であれば Whittaker & Watson (1965) に示してある如く Cauchy の定理を用いて証明出来る。ここで (2.4) の条件から用曲線 C 内および C 上での方程式 $\tau(z) = \tau(x)$ の唯一の解は $x = z$ の時 (Whittaker & Watson 1965, p.131) であることに注意すれば Cauchy の定理から

$$j(f(x)) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{j(f(z)) \tau'(z)}{\tau(z) - \tau(x)} dz \quad (2.7)$$

$$\text{よって } \frac{1}{\tau(z) - \tau(x)} = \frac{1}{\tau(z)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n(z)}{\tau^n(z)} \right] \quad (2.8)$$

であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
 j(f(x)) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{j(f(z)) z'(z)}{z(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \tau^n \int_C \frac{j(f(z)) z'(z)}{z^{n+1}(z)} dz \\
 &= j(f(0)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^n}{n} \operatorname{Res} \left[\frac{j'(f(z))}{z^n(z)} \right] \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

証明終り

定理1の成り立つ範囲は(2.4)を含め定理の条件を満たす閉曲線 C に囲まれている領域であるのは当然である。周数 τ の値が複素平面全域で与えらるれば、その範囲 C を指してその範囲を決定するのは容易であるが、実際には物理的理由から周数 τ が実数軸上、または僅かに正の領域 D のみしか与えらるる場合が多い。例として§3の例題5をあげよう。この様な場合も(実軸上で $|z(a)| = |z(b)| = M$, $ab < 0$ と満たす a, b が求まり、しかも区間 $[a, b]$ で $z(x)$ が単調増加(または減少)しているとき、この周数 τ と複素平面に拡張した場合に、 a, b を通り $|z(z)| = M$ を満たし、特異点を避ける閉曲線を描けるだろう。この様にして得る閉曲線 C は、 $z(z)$ がその内部で解析的であることから最値原理により $z(z)$ は C 上で最値をとる。またこの C は定理1の条件を満たす。§3の例題で実軸上で $|z(x)|$ が単調増加している区間を確保しているが、実は複素平面からこの実軸上の区間は勿論も、また複素平面上で成り立っていることに注意してほしい。

次の様な下付添字 n の項までの部分級数 τ^n を表現することにしよう。

$$j_n(f(z)) = B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + \dots + B_n z^n \quad (2.10)$$

一方, n 次の代数方程式 (2.10) の解 ε の中 n 次の近似解と
いう意味で ε 付き添字を導入し, $\varepsilon^{(n)}$ と書くことにする. 同い
意味で f の n 次の近似解を $f^{(n)}$ と表わすと, (2.10) の根 $\varepsilon^{(n)}$
は $f^{(n)}$ と ε の関数として表わされる. すると (1.4) 式から,

$$\frac{df^{(n)}}{d\varepsilon} = (\varepsilon^{(n)} + 1) \frac{f^{(n)} - a_0}{\varepsilon} \quad (2.11)$$

(2.11) 式の $\varepsilon^{(n)}$ は (2.10) の根であることに注意すれば, (2.11) 式は
 $f^{(n)}$ についての一般的には非線形の一階常微分方程式となり,
この解は原則的に求めることが出来る. $f^{(n)}$ が求まれば, (1.4)
式の $\varepsilon^{(n)} = \frac{\varepsilon f^{(n)}}{f^{(n)} - a_0} - 1$ から $\varepsilon^{(n)}$ が求まり, その振舞いから (2.4)
式の収束範囲が決定出来る. この展開法の近似手順は次の
様にまとめることが出来る.

ステップ 1: (2.10) 式の様に $j(f)$ を n 項まで展開する.

ステップ 2: 代数方程式 (2.10) の根 $\varepsilon^{(n)}$ と $f^{(n)}$, ε の関数
として求める. この時一般には n 位の根が求まる
が物理的根軸にあり一つ手前の近似 $\varepsilon^{(n-1)}$ に最も近い
ものをだけを選び, 他の $(n-1)$ 位の根は捨てる.

ステップ 3: 一階の常微分方程式 (2.11) を解いて $f^{(n)}$
を求め, $\varepsilon^{(n)}$ と ε の関数として求める. これにより
(2.10) の展開の有効範囲が求まる.

この3つのステップを $n=0$ から始め, $f^{(n)}$ が充分収束す

る所までこの手順を繰返せばよい。これが収束することは定理1により保障されている。

こゝで第0次近似 $f^{(0)}$ を考えてみよう。 $f^{(0)}$ については次のレニマ1が成り立つことを示そう。

レニマ1. 第0次近似 $f^{(0)}$ は $z \ll 1$, $z \gg 1$ の2領域で (1.1)

の最初の二項 ($= a_0 + a_1 z$) と (1.2) で表わされる漸近関係を持つ。さらにもし f 自体が一次関数

$$f = \frac{Az + B}{Cz + D} \quad (2.12)$$

で表わされる関数であれば、 $f^{(0)}$ が厳密解である。さらに $C \neq 0$, $AD - CB \neq 0$ とする。

証明. 定理1から $B_0 = j(f(0)) = \frac{a_0 - c_\infty}{a_1}$ であるので

$$\begin{aligned} \frac{(f^{(0)} - c_\infty)z}{f^{(0)} - a_0} &= \frac{a_0 - c_\infty}{a_1} \\ \therefore f^{(0)} &= \frac{c_\infty z - \frac{a_0(a_0 - c_\infty)}{a_1}}{z - \frac{a_0 - c_\infty}{a_1}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

いま (2.12) を $z \ll 1$ と $z \gg 1$ の展開を行うと $f^{(0)}$ は (1.1) の最初の二項と (1.2) の関係を持つことが確認出来る。一方を

(2.12) が成り立つと、 $a_0 = \frac{B}{C}$, $a_1 = \frac{AD - CB}{D^2}$, $c_\infty = \frac{A}{C}$ である。

これらの値を (2.13) 式に代入すれば $f^{(0)} \equiv f$. 証明終

$f^{(0)}$ は、実は $z=0$ での $f(0)$, $f'(0)$ と $f(\infty)$ の三つの値を

用いた一次の有理関数近似と一致することは容易に確認出来る。し、こゝから判ることは、本属術法では第0次近似7
 関数 f の一次有理関数による=変向術向を行ひ、そのおりの
 "ずれ"を汎度数 $j(f)$ を属術1を修正してゐることである。実際 §3 で示す様に最初の近似 $f^{(0)}$ が既に比較的よい近似になる、この説明に因、このよう。

このまで考へてきたのは $f(z)$ が(1.1)で表わされる媒質内
 数系である、だが、こゝでは適応関数をも、と一般の層内数系
 に拡張することを考へておこう。

$$f(z) = a_0 + a_1 z^M + a_2 z^{M(1+N)} + \dots + a_n z^{M(1+(n-1)N)} + \dots \quad (2.14)$$

こゝで M は任意の正の実数、 N は任意の正の整数とし、 $a_i \neq 0$
 とする。 $M=N=1$ の場合が(1.1)の属術にあたる。こゝで式(1.3)
 , (1.4)の $j(f)$ とこの定義と次の様に拡張しよう。

$$j(f(z)) = \frac{[(f-a_0)^N - (c_0-a_0)^N] z^M}{f-a_0} \quad (2.15)$$

$$c(z) = \frac{z f'}{f-a_0} - M \quad (2.16)$$

定理1で、 $f, j(f), c$ の定義を(2.14), (2.15), (2.16)の如く
 再定義し、 $S = \mathbb{C}^{MN}$ とおく、定理1は S 平面上でそのま
 ゝ成り立つことを注意しておこう。また N の値によ、こゝ、
 $j(f)$ は f についての一次でなく ^{N 次}非線形有理関数に居ることを注意せよ。

また、 c の定義が必要なのは複単数性をもちこことである、

だが、もし (1.1) の $a_0 \neq 0$ の場合には

$$\tau^* = \frac{zf'}{f} \quad (2.17)$$

とおいてその性格と保持していることに注意されたい。

これは、定理1が $j(f)$, τ^* について成り立つことを示唆している。

また $j(f)$ が f について一次関数であることを注意

すれば、定理1, $L \geq 1$ は $j(f)$ の逆数について成り立つ

ことは容易に想像されよう。

$$j^*(f) = j^{-1}(f) = \frac{f - a_0}{(f - c_0)^2} \quad (2.18)$$

このように定理1, $L \geq 1$ は, $f, j(f), \tau$ は勿論 $j \rightarrow j^*$

$\tau \rightarrow \tau^*$ に変えたときの組合せでも成り立つ。§3で示

す様な問題によつては τ の代わりに τ^* と, j の代わりに j^* と

用いた場合があるか。これは最初の数例を考えた時より収束

性が早い組合せを選んだ結果である。

§3. 数値例

最初の4例は Baker (1974) から、最後の例題は粘性流の厳密解 Blasius 解から選んだ。この5題とも我々の関数の正の実軸上 ($0 \leq x < \infty$) の値のみに興味をもっている場合を取扱うことにする。

例題1. $f(x) = 1 - e^{-x} \quad 0 \leq x < \infty$

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots \quad (3.1)$$

$$f(x) \sim 1 + o(1) \quad x \rightarrow \infty$$

式(1.3), (1.4)に於て, $\tau = j(f)$ と τ を定義すると

$$\tau = \frac{x f'}{f} - 1 = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \dots \quad (3.2)$$

$$j(f) = \frac{(f-1)x}{f} = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \dots \quad (3.3)$$

τ , τ' (3.2) 式の逆変換 $x = -2\tau + \frac{2}{3}\tau^2 + \dots$ (3.3) に代入すれば,

$$j(f) = -1 + \tau \quad (3.4)$$

(3.4) 式は $j(f)$ と τ とで展開するとこの積数は最初の n 項で終結するところを警くべき結果を示して置く。§2 の手順で順次 $f^{(0)}$, $f^{(1)}$, $\tau^{(0)}$, $\tau^{(1)}$ を求めて行くと,

$$\frac{(f^{(0)}-1)x}{f_0} = -1 \quad \therefore f^{(0)} = \frac{x}{1+x}, \quad \tau^{(0)} = \frac{-x}{1+x} \quad (3.5)$$

$$\frac{(f^{(1)}-1)x}{f^{(1)}} = -1 + \left(1 - \frac{x f^{(0)'}}{f^{(0)}}\right) \therefore f^{(1)} = 1 - e^{-x}, \quad \tau^{(1)} = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} - 1 \quad (3.6)$$

(3.6) の $f^{(1)}$ を解くとき $f^{(1)}(0) = 0$ とする初期条件を用いる。 $\tau^{(0)}$, $\tau^{(1)}$ を吟味してわかるが $|\tau^{(0)}|, |\tau^{(1)}|$ と $0 \leq x < \infty$ で単調増加して行くので正の実軸上での展開が成り立つことが容易にわかる。 $\tau^{(1)}$ の限, τ であるが, $-\infty < x < \infty$ で $|\tau^{(1)}|$ は増加して行き $f^{(1)}$ の実軸上全域で成り立つことが判別する。

例題 2. $f(x) = (1 - e^{-x})/x \quad 0 \leq x < \infty$

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} - \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \dots \quad (3.7)$$

$$f(x) \sim 0 + o(1/x) \quad x \rightarrow \infty$$

例題 1 と同様キ (1.3), (1.4) 式の $j(f)$, τ の定義式を用いませ

$$\tau = \frac{x f'}{f-1} - 1, \quad j(f) = \frac{f x}{f-1} \quad (3.8)$$

$$j(f) = 2 - \tau \quad (3.9)$$

例題 2 の場合キ $j(f)$ の級数は 2 階で終結して 1 する。ニハカ

キ $f^{(0)}, f^{(1)}$ を解くと

$$f^{(0)} = \frac{1}{1+x/2}, \quad \tau^{(0)} = -\frac{x}{2+x}, \quad (3.10)$$

$$\frac{df^{(0)}}{dx} = -\frac{1+x}{2x} f^{(0)} + \frac{1}{x}, \quad f^{(1)} = (1 - e^{-x})/x, \quad \tau^{(1)} = \frac{x(e^{-x}-1)}{1-x-e^{-x}} - 2. \quad (3.11)$$

この例と例題 1 と同じく $0 \leq x < \infty$ の正の虚軸上で成り立つ

カ、 $f^{(1)}$ は 全軸上で成立して 1 する。

例題 3. $f(x) = \left\{ [(1+x+x^2)(1+x)]^{1/3} - 1 \right\} / x \quad 0 \leq x < \infty$

$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{5}{81}x^2 - \frac{2^4}{3^5}x^3 + \dots \quad (3.12)$$

$$f(x) \sim 1 + o(1) \quad x \rightarrow \infty$$

この級数には、分岐点カ $x = -1, -\frac{1}{2}(1 \pm 3i)$ に零点カ -12 には

あり前 2 題に較べて複雑である。この例では、 τ の代わりに

(2.17) 式の τ^* を選ぶと

$$\tau^* = \frac{x f'}{f}, \quad j(f) = \frac{(f-1)x}{f - \frac{2}{3}}$$

$$j(f) = -\frac{2}{3} + \frac{7}{4}\tau^* - \frac{3}{8}\tau^{*2} + \dots \quad (3.13)$$

(3.13) を 1 次解くと

$$f^{(0)} = \frac{1+x}{\frac{3}{2}+x}, \quad z^{(0)} = \frac{x}{2(x+\frac{2}{3})(x+1)}, \quad z^{(1)} = \frac{1-x^2}{2(1+x)^2(\frac{3}{2}+x)} \quad (3.14)$$

$$\frac{df^{(1)}}{dx} = \frac{4f^{(1)}}{7x} \frac{(3f^{(1)} - 2 + 2x(f^{(1)} - 1))}{f^{(1)} - \frac{2}{3}}$$

⋮

この場合は $J(f)$ が (1.4) の \mathcal{C} で展開して z^* であるか z^* で展開しても無限級数となる例である。ただ、 z^* の方が \mathcal{C} より収束速度が速いことが解る。この \mathcal{C} で注意すべきことは、これまでの例と異なり、 $z^{(0)}$ は (2.4) の条件 $0 \leq x \leq 1$ と $1 \leq x < \infty$ の二つの隣接領域でしか満足し得ることである。これは $z^{(0)}$ が $x=1$ で最大値をとることから判る。 $f^{(1)}$ は Runge-Kutta 法で数値積分し、 $z^{(1)}$ の値ととて表 1 に示してある。 $z^{(0)}$, $z^{(1)}$ と全く同じ増向を示している。しかしこの例題では、 $x=0$, $x \rightarrow \infty$ で $z^* \rightarrow 0$ であり、その点では関数値の値は厳密であるから、(3.13) の展開は $0 \leq x \leq 1$ と $1 \leq x < \infty$ の二つの領域で個別に成り立つ。しかし $x=1$ は両側の領域に共通であることに注意すれば、(3.13) の展開は実は $0 \leq x < \infty$ の全領域で成り立つと考へておこう。なお表 1 には、同じ関数 f (3.12) の最初の三項による Taylor 展開による近似と、この三項を用いて $[1/1]$ Padé 展開の結果も併記してあるが、現在の方法が大変すぐれていること

は明かである。実際 $f^{(0)}$ が既に可成りよい近似 ε 与えらることは注目の値の1ほう。

例題4.
$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$$

$$f(x) \sim 1 - x + 2/x^2 - 3/x^3 + \dots \quad (3.15)$$

$$f(x) \sim 0 + o(1/x) \quad x \rightarrow \infty$$

このまでの例と違、(3.15) とみて判る様にこの関数は発散してしまふ、 $x=0$ で解析関数ではない。だが Baker (1974) によるとこれは Stieltjes 関数と呼ばれる、 $[n/m]$ の如き対角 Padé 近似を求めると枝的定理 (Parabolic Theorem) により収束すること判る、こゝる。この例は厳密には定理1の解析関数の範囲内では取り扱えない場合があるか、最近 Henrici (1964) により Lagrange-Bürmann の定理は非解析関数にも拡張出来ること示されこゝる。定理1とそのまゝ、この関数に使、こゝらう。今 (2.17), (2.18) 式を定義) に τ^* , j^* と選ぶと

$$\tau^* = \frac{x f'}{f}, \quad j^* = \frac{(f-1)}{f x} \quad \tau^*$$

$$j^*(f) = 1 + \tau^* \quad (3.16)$$

j^* の級数は τ^* で展開するとまた二項で終結してしまふ。

$$f^{(0)} = \frac{1}{1+x}, \quad \tau^{(0)} = -\frac{x}{1+x}$$

$$\frac{d f^{(1)}}{dx} = -\frac{1+x}{x^2} f^{(1)} + \frac{1}{x^2} \therefore f^{(1)} = \frac{e^{-x}}{x} E_1(1/x) \quad (3.17)$$

たゞし E_1 は積分指数関数

$$E_1(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{t} dt$$

E_i の漸近公式から

$$f^{(i)} \sim 1 - x + 2/x^2 + \dots \quad x \ll 1$$

$$\sim \frac{1}{x} [\log x - \gamma + \dots] \quad x \gg 1$$

この例で $\tau, j(f)$ を選んでおまりがその場合は無限級数になり, この場合の振れ = 項では軽微になる。

例題 5. Blasius 関数

半無限平板を過ぎる境界層の厳密解は Blasius が最初に見つけた。今流線の関数と F とすると, F 階次の方程式の解と見做される。

$$F''' + FF'' = 0 \quad F(0) = F'(0) = 0 \quad (3.18)$$

$$F'(\infty) \rightarrow 1$$

(3.18) のよし $f = F'$ とおくと次の様子を収束する級数解と見做すことができる (Rosenhead 1964)。

$$f(x) = \alpha_1 x - \frac{\alpha_1^2 x^4}{4!} + 11 \frac{\alpha_1^3 x^7}{7!} + \dots \quad (3.19)$$

$$f(x) \sim 1 - \frac{0.331}{x} e^{-\frac{1}{2}(x-1.22)^2} \quad x \rightarrow \infty$$

ここで $\alpha_1 = 0.4696$ 。

(3.19) の級数は (2.14) で $M=1, N=3$ の時に対応してあり, (2.15), (2.16) より τ と $j(f)$ と

$$\tau = \frac{x f'}{f} - 1, \quad j(f) = \frac{(f^3 - 1)x}{f} \quad (3.20)$$

と定義する。 $j(f)$ と τ によって展開すると

$$j(f) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots \quad (3.22)$$

$$\therefore \kappa \quad A_0 = -1/d_0, \quad A_1 = -8d_1 + 1/3d_1, \quad A_2 = -\left(\frac{17 \times 6}{7!} d_1 + \frac{11}{7! d_1}\right) 8^2, \dots$$

$$f^{(0)} + f \frac{d_1}{d_1 x} - 1 = 0$$

$$\frac{df^{(1)}}{dx} = \left(1 - \frac{1}{A_1}\right) \frac{f^{(1)}}{x} + \frac{d_1}{A_1} (f^{(1)3} - 1)$$

$$\frac{df^{(2)}}{dx} = \frac{f^{(2)}}{x} \left[\frac{1}{2A_0} \left\{ -A_1 + \sqrt{A_1^2 + 4A_2 \left(\frac{1-f^{(2)}}{f} d_1 x - A_0 \right)} \right\} + 1 \right] \quad (3.23)$$

⋮

(3.23) 式の $f^{(0)}$ は Newton 法で、 $f^{(1)}$ 、 $f^{(2)}$ は Runge-Kutta 法の数値積分した。Runge-Kutta の場合はステップ ± 0.01 として $M = 100$ MELCOM 70 で計算した結果を表 1 に示している。(3.18) の厳密解と比較して $f^{(0)}$ 、 $f^{(1)}$ 、 $f^{(2)}$ の収束が全領域 $0 \leq x < \infty$ にわたって素晴らしく良い。実際 $f^{(2)}$ では、最大相対誤差は全領域にわたって 0.1% 以下である。殊に (3.23) と $x \rightarrow \infty$ とした解くと判る様に $f^{(2)} \sim 1 - 4e^{-3d_1 x}$ と指数関数的に 1 に近づいていることが注目される。例題 3 の場合と同様に参考のため 3 項を使、 \pm Taylor 展開、 $[1/1]$ の Padé 展開の結果も併記した。本法の結果が抜群に良いことが判る。

§4. おわりに

§3 で述べたように、 \pm タイプの関数について本級数展開法

による数値計算を行、こゝから、解析関数のみでなく完散級数を含めて非常に収束性のよい解を与えることが判、る。この様な収束性のよい解が得られる要因は2つあると果わける。ひとつは、近似する関数 f 自体と直接展開するのでなく、展開する関数系として f の^{一般的には N 次有理}関数形式として^(B.2.15) $j(f)$ (1.3) (可参照) を選んだことと、もう一つは非線形変換 (1.4) 式^の変数 z を導入したことである。 $f, j(f), z$ が考慮している領域内で正則である場合の級数の収束は古典的には Lagrange-Bürmann の定理で証明出来る。その収束範囲は未だ、 $|z|$ 又は $|z'|$ が単調増加している領域に限定される。またこの定理は行列理論を使、こゝ全く代数的な方法で非解析関数の拡張出来ることを示している。このため完散級数でも扱えることは注目すべきことである。

本展開法の第0次近似 $f^{(0)}$ は実質的には $x=0, \infty$ の二点間の一次有理関数による補間を行、こゝに相当する。すなわち $f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}$ の三つの情報を使、こゝ三辺の未知数を定めこゝるわけである。§3の結果をみても判る様に $f^{(0)}$ が既に相当地に良い近似を与えるのはこのためである。そこでこの方法を有効に使うには $x=\infty$ での関数の振舞いを知る C_0 が事前に判、こゝることが必要である。未知関数の $f^{(n)}$ の値を使、こゝことは一見不自然にみえるが、拘理内

題と見るときこの値は境界条件等から既知の場合が多い。
 例えば例題5等はその典型的な例で、他の問題でも既知の場合が非常に多いとつうことを付け加えておこう。また5の例題から判る様に $x \rightarrow \infty$ での振舞いが指数関数的である方が収束性はよりよいのである。これは変数 z の選び方と関係してくるが詳しくは別の論文で検討したい。またこの方法は $j(f)$ が z についての分数形式としておけること、関数 f の極、零点と z 変数 z に近似されるべく z と $Pade$ 展開と密接な関係をもつ。このことも想定されるから z の点は今後の課題としたい。この方法を最も威力を発揮するのは複雑な混合型非線形境界値問題に適用したときと思うが、副射を伴う熱伝導の問題、流れの場の中での触媒反応の問題に適用した計算結果は別の論文で報告したい。

今井功敏教授、橋本英典教授、曾田秀行教授には色々御指導のたのびに、心から謝意を表したい。

Table 1

Ex. 4 $f = \{ [(1 + x + x^2)(1 + x)]^{1/3} - 1 \} / x$

<u>x</u>	<u>3 term Taylor Ser.</u>	<u>Pade [1/1]</u>	<u>f⁽⁰⁾</u>	<u>f⁽¹⁾</u>	<u>τ⁽¹⁾</u>	<u>Exact</u>
.2	.7086	.7088	.7059	.7082	.0540	.7083
.6	.7778	.7810	.7619	.7701	.0952	.7729
1.0	.8272	.8406	.8000	.8101	.100	.8171
2.0	.8642	.9524	.8571	.8660	.089	.8795
3.0	.7778	1.030	.8889	.8957	.0767	.9108
4.0	.5679	1.088	.9091	.9143	.0666	.9294
5.0	.2346	1.132	.9231	.9272	.058	.9417

Ex. 5 Blasius function

<u>x</u>	<u>3 term Taylor Ser.</u>	<u>Pade⁽⁰⁾ [1/1]</u>	<u>f⁽⁰⁾</u>	<u>f⁽¹⁾</u>	<u>f⁽²⁾</u>	<u>τ⁽²⁾</u>	<u>Exact</u>
.2	.0939	.0939	.0938	.0939	.0939	.00049	.0939
.6	.2806	.2806	.2758	.2806	.2806	.0126	.2806
1.0	.4606	.4606	.4318	.4607	.4606	.0570	.4606
2.0	.8211	.8163	.6641	.8211	.8166	.3745	.8167
3.0	1.1588	.9616	.7688	1.000	.9684	.7918	.9690
4.0	3.2293	.9646	.8247	1.055	.9976	.9678	.9978
5.0	14.2633	.9386	.8591	1.013	1.0006	.9971	.9999

References:

- Baker, G.A. 1974 "Essentials of Pade Approximants", Accademic Press
- Henrici, P. 1964 "An Algebraic Proof of the Lagrange-Bürman Formula" Jour. of Math. Anal and Appl. vol. 8, p 218.
- Henrici, P. 1974 "Applied and Computational Complex Analysis" vol. 1, John & Wiley & Sons Co.
- Moore, F.K. 1951 "Unsteady Laminar Boundary-Layer Flow" NACA TN 2471
- Rosenhead, S, 1964 "Laminar Boundary Layers" Oxford University Press
- Tokuda, N. 1966 "The Dynamics of Moving Bubbles in Single- and Binary Component System" Ph. D Thesis, University of Michigan
- Tokuda, N. & W. J. Yang 1968 "Unsteady Stagnation Point Heat Transfer" Proc. 3rd Int. Heat Transf. Conf. vol. 2, p. 223
- Tokuda, N. et al 1970 "Dynamics of Vaper Bubble in Binary Liquid Mixtures with Translatory Motion" Proc. 4th Int. Heat Transf. Conf.; vol. 5
- Van Dyke, M.D. 1974 "Analysis and Improvement of Perturbation Series" Quart. J. Mech. App. Math, vol. 27, p. 423